

SÉRIE A
N° 4203
N° D'ORDRE :
5054

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

ALAIN GHOUILA-HOURI

1^{re} THÈSE. — FLOTS ET TENSIONS DANS UN GRAPHE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 6 décembre 1963 devant la Commission d'Examen.

MM. LICHNEROWICZ	<i>Président.</i>
VILLE	} <i>Examineurs.</i>
DEHEUVELS	
BERGE	
	<i>Invité</i>

PARIS

GAUTHIER-VILLARS & C^{ie} IMPRIMEUR-ÉDITEUR

55, quai des Grands-Augustins

1964

SÉRIE A
N° 4203
N° D'ORDRE :
5054

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

ALAIN GHOUILA-HOURI

1^{re} THÈSE. — FLOTS ET TENSIONS DANS UN GRAPHE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 6 décembre 1963 devant la Commission d'Examen.

MM. LICHNEROWICZ	<i>Président.</i>
VILLE	} <i>Examineurs.</i>
DEHEUVELS	
BERGE	<i>Invité</i>

PARIS

GAUTHIER-VILLARS & C^e IMPRIMEUR-ÉDITEUR

55, quai des Grands-Augustins

1964

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen..... M. ZAMANSKY.

JULIA (G.).....	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	FORTET.....	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
PRENANT.....	T	Anatomie et Histologie comparées.	SCHWARTZ.....	T	Calcul différentiel et intégral.
GRASSÉ.....	T	Évolution des Êtres organisés.	CHOUARD.....	T	Physiologie végétale.
PRÉVOST.....	T	Chimie organique.	MALAVARD.....	T	Aviation (Techniques aéronautiques).
WYART.....	T	Minéralogie et Cristallographie.	BRELOT.....	T	Calcul différentiel et intégral.
TEISSIER.....	T	Zoologie.	NORMANT.....	T	Chimie organique.
MANGENOT.....	T	Biologie végétale (Orsay).	BÉNARD.....	T	Chimie minérale.
AUGER.....	T	Physique quantique et Relativité.	BUVAT.....	T	Botanique (E. N. S.).
MONNIER.....	T	Physiologie générale.	DUGUÉ.....	T	Statistiques mathématiques.
PIVETEAU.....	T	Paléontologie.	SOULAIRAC.....	T	Psychophysiologie.
ROCARD.....	T	Physique (E. N. S.).	ULRICH.....	T	Physiologie végétale.
CARTAN.....	T	Mathématiques (E. N. S.).	MARÉCHAL.....	T	Optique théorique et appliquée.
LAFFITTE.....	T	Chimie générale.	KIRRMANN.....	T	Théories chimiques.
FAVARD.....	T	Géométrie supérieure.	CHADEFAUD.....	T	Botanique.
COULOMB.....	T	Physique du Globe.	M ^{lle} LE BRETON.....	T	Physiologie de la nutrition.
M ^{lle} COUSIN.....	T	Biologie animale (S. P. C. N.).	LELONG.....	T	Application de l'analyse à la géométrie.
MORAND.....	T	Chimie minérale.	DEVILLERS.....	T	Anatomie et Histologie comparées.
DRACH.....	T	Zoologie.	BHRESMANN.....	T	Topologie algébrique.
KASTLER.....	T	Physique (E. N. S.).	FRANÇON.....	T	Physique (S. P. C. N.).
EPHRESSI.....	T	Génétique.	GLANGEAUD.....	T	Géographie physique et Géologie dynamique.
RIVIÈRE.....	T	Géologie S. P. C. N. et Sédimentologie.	GODEMENT.....	T	Mathématiques (M. P. C.).
GAUTHERET.....	T	Biologie végétale (P. C. B.).	PISOT.....	T	Techniques mathématiques de la Physique.
LUCAS (R.).....	T	Recherches physiques.	ROCH.....	T	Géologie.
THOMAS (A.).....	T	Biologie cellulaire.	SCHATZMAN.....	T	Astrophysique.
ARNULF.....	T	Optique appliquée.	TERMIER.....	T	Paléontologie stratigraphique.
MORAND.....	T	Physique-Enseignement.	ZAMANSKY.....	T	Mathématiques générales.
SOLEILLET.....	T	Physique (P. C. B.).	LENNUIER.....	T	Physique (M. G. P.).
FORTIER.....	T	Mécanique expérimentale des fluides.	RIZET.....	T	Génétique.
DANJON.....	T	Astronomie.	ROUTHIER.....	T	Géologie appliquée.
PETIT.....	T	Biologie maritime.	M ^{me} TONNELAT.....	T	Physique théorique.
QUNNEY.....	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.	DIXMIER.....	T	Mathématiques (M. P. C.).
GALLIEN.....	T	Embryologie.	SOUCHAY.....	T	Chimie générale.
EICHORN.....	T	Botanique.	AIGRAIN.....	T	Electrotechnique générale.
DE CUGNAC.....	T	Biologie végétale (S. P. C. N.).	BRUSSET.....	T	Chimie systématique.
M ^{lle} CAUCHOIS.....	T	Chimie physique.	LÉVY (M.).....	T	Physique théorique des hautes énergies (Orsay).
THELLIER.....	T	Physique du Globe.	M ^{me} CHAIX.....	T	Chimie biologique.
L'HÉRITIER.....	T	Biologie générale (Orsay).	M ^{me} HUREL-PY.....	T	Biologie végétale (P. C. B.).
GRIVET.....	T	Radioélectricité (Orsay).	PIAUX.....	T	Chimie (M. P. C.).
PONCIN.....	T	Mécanique générale.	BRUN.....	T	Mécanique théorique des fluides.
DUBREIL.....	T	Arithmétique et théorie des nombres.	LEDERER.....	T	Chimie biologique.
QUELET.....	T	Chimie organique.	M ^{me} DUBREIL.....	T	Mathématiques (Agrégation).
CAGNIARD.....	T	Géophysique appliquée.	M ^{me} LELONG.....	T	Mathématiques II (E. N. S.).
CHAMPETIER.....	T	Chimie macromoléculaire.	BELLAIR.....	T	Géologie (S. P. C. N.).
CUVILLIER.....	T	Micropaléontologie.	COTTE.....	T	Physique électricité.
JUNG.....	T	Pétrographie.	DUBOIS (J.-E.).....	T	Chimie organique.
TRILLAT.....	T	Microscopie et diffraction électronique.	LAMOTTE.....	T	Zoologie (E. N. S.).
WIEBMAN.....	T	Chimie organique et structurale.	MICHEL (A.).....	T	Chimie minérale (Orsay).
JACQUINOT.....	T	Spectroscopie et Physique céleste (Orsay).	OLMER.....	T	Énergétique générale.
VASSY.....	T	Physique de l'atmosphère.	ROUAULT.....	T	Électricité (Orsay).
DESTOUCHES.....	T	Théories physiques.	GAUTHIER.....	T	Mécanique appliquée.
AMIEL.....	T	Chimie générale.	BARCHEWITZ.....	T	Chimie physique.
HOCART.....	T	Minéralogie et Cristallographie.	BROSSEL.....	T	Physique atomique.
J.-P. MATHIEU.....	T	Physique optique.	BUSER.....	T	Physiologie comparée.
COUTEAUX.....	T	Cytologie.	CAMUS.....	T	Physiologie végétale (B.M.P.V.).
MAY.....	T	Zoologie (Orsay).	CASTAING.....	T	Physique II, Thermodynamique (Orsay).
CHOQUET.....	T	Théorie des fonctions et Topologie.	CURIEN.....	T	Minéralogie et Cristallographie.
FELDMANN.....	T	Biologie végétale marine.	MOYSE.....	T	Physiologie végétale (Orsay).
GUINIER.....	T	Physique des solides (Orsay).	NOIROT.....	T	Évolution des Êtres organisés.
JOST.....	T	Physiologie comparée.	PANNETIER.....	T	Chimie générale.

POSSOMPES.....	T	Zoologie.	DAUDEL.....	T	Mécanique ondulatoire appliquée à la Chimie théorique et à la Physique nucléaire.
PULLMANN.....	T	Chimie quantique.	Mlle FOURCROY.....		Biologie végétale (S. P. C. N.).
TEILLAC.....	T	Physique nucléaire et Radio-activité.	Mme CHOQUET-BRUHAT.....	T	Mécanique analytique et mécanique céleste.
TONNELAT.....	T	Biologie physicochimique.	Mlle VEIL.....		Physiologie générale.
VILLE.....	T	Économétrie.	LWOFF.....	T	Microbiologie.
WILLEMART.....	T	Chimie (P. C. B.).	SIESTRUNCK.....	T	Mécanique physique et expérimentale.
DODE.....	T	Chimie (Orsay).	LACOMBE.....	T	Métallurgie des métaux nucléaires.
FREYMANN.....	T	Recherches physiques.	BROCHARD.....	T	Physique (P. C. B.) (Orsay).
GUNOCHET.....	T	Biologie végétale (S. P. C. N.) (Orsay).	CABANNES.....	T	Mécanique générale.
ROLLET.....	T	Chimie minérale.	LESIEUR.....	T	Mathématiques I (Orsay).
Mlle JOSIEN.....	T	Chimie (S. P. C. N.).	MAZET.....	T	Mécanique générale (Orsay).
CHEVALLEY.....	T	Géométrie algébrique et théorie des groupes.	CAIRE.....		Géographie physique et Géologie dynamique.
ARNOULT.....	T	Électronique (Orsay).	COMOLET.....	T	Mécanique des fluides.
CHAPELLE.....	T	Physique (Orsay).	CORABCEUF.....		Physiologie animale (Orsay).
DELANGE.....	T	Mathématiques I (Orsay).	DELLOUE.....		Physique de l'exosphère.
DENY.....	T	Mathématiques générales (Orsay).	GORENFLOT.....		Botanique II (Orsay).
GERMAIN.....	T	Mécanique théorique des fluides.	HOUILLOU.....		Biologie animale (P. C. B.).
LUCAS (G.).....	T	Géologie.	JULLIEN (J.).....		Chimie (S. P. C. N.) (Orsay).
ALLARD.....	T	Chimie physique.	MALGRANGE.....	T	Techniques mathématiques de la Physique (Orsay).
BERTHELOT.....	T	Physique des particules fondamentales.	OLIVIER.....		Anthropologie.
BRICARD.....	T	Météorologie et Physique de l'atmosphère.	NOZERAN.....	T	Botanique II (Orsay).
Mme ALBE-FESSARD.....	T	Psychophysiologie.	BLANC-LAPIERRE.....	T	Physique (E. N. S.) (Orsay).
FRIEDEL.....	T	Physique des Solides (Orsay).	CHEVAUGÉON.....	T	Botanique (Orsay).
JULIA (M.).....	T	Études des moléculaires naturelles complexes.	KAHANE.....	T	Mathématiques (Orsay).
LENDER.....	T	Biologie animale (S. P. C. N.) (Orsay).	SAMUEL.....	T	Mathématiques (E. N. S. féminines).
MAGAT.....	T	Physicochimie des radioéléments.	KOURGANOFF.....	T	Astronomie (Orsay).
Mlle QUINTIN.....	T	Électrochimie.	THIRY.....	T	Mécanique céleste.
MONOD.....	T	Chimie du métabolisme.	ABELÈS.....		Physique (S. P. C. N.).
BENOIT.....	T	Physiologie animale (Orsay).	AMAT.....		Physique (P. C. B.).
DE POSSEL.....	T	Analyse numérique.	AUBOIN.....		Géologie.
CHARLOT.....	T	Chimie analytique.	Mme BENOIT-GUEUTAL.....		Physique nucléaire et radio-activité.
LEMÉE.....	T	Physiologie végétale (B. M. P. V.) (Orsay).	BOUGIS.....		Biologie marine (Villefranche-sur-mer).
GUÉRIN.....	T	Chimie (M. P. C.) (Orsay).	BRUHAT.....	T	Mathématiques (M. P. C.).
CHATELET (M.).....	T	Chimie (P. C. B.).	BRUNN.....	T	Géologie historique (Orsay).
JEAN.....	T	Physique nucléaire (Orsay).	CHABBAL.....		Physique (M. G. P.) (Orsay).
MATTLER.....	T	Physique (S. P. C. N.).	DEHEUVELS.....	T	Mathématique propéd. (Orsay).
BERGERARD.....	T	Zoologie (Orsay).	D'ESPAGNAT.....		Physique théorique (Orsay).
BERTIN.....	T	Électronique (Orsay).	FURON.....		Géologie (S. P. C. N.).
BOUSSIÈRES.....	T	Chimie des radioéléments (Orsay).	Mme GANS.....	T	Génétique.
Mme COUTURE.....	T	Thermodynamique et Mécanique physique.	GENEVÈS.....		Biologie végétale (P. C. B.).
ELLENBERGER.....	T	Géologie des grandes régions du Globe.	GUILBERT.....		Physique (C. U. S. Orléans).
FRANC.....	T	Biologie animale (P. C. B.).	HUPE.....		Pétrographie.
SCHNELL.....	T	Botanique tropicale (Orsay).	HOLLANDE.....	T	Biologie générale.
STOLKOWSKI.....	T	Physiologie végétale.	LIONS.....	T	Analyse numérique.
ACHER.....		Chimie biologique (Orsay).	MAITRE.....		Chimie (P. C. B.).
BAUDOUIN.....		Biologie animale (P. C. B.).	MEYER.....		Physique propédeutique.
BEAUMONT.....		Biologie animale (S. P. C. N.).	NICOLAS.....		Géologie appliquée.
BLAMONT.....	T	Géophysique de l'ionosphère.	PANIGEL.....		Biologie générale.
BOURREAU.....		Botanique.	RAVIER.....		Pétrographie.
CURIE (D.).....		Physique (M. G. P.).	ROSEAU.....	T	Mécanique théorique des fluides.
DURAND-DELGA.....	T	Géologie.	ROUBINE.....		Électronique.
FRÉON.....	T	Chimie organique (Orsay).	SILBER.....	T	Chimie (P. C. B.).
HELLER.....	T	Physiologie végétale.	UEBERSFELD.....	T	Électronique.
TORTRAT.....	T	Calcul des probabilités.	YVON.....	T	Théories physiques.
CAILLEUX.....		Géologie (S. P. C. N.).			
MAGNAN.....	T	Physique (S. P. C. N.).			

Secrétaire Général..... R. POULLAIN.



FLOTS ET TENSIONS DANS UN GRAPHE

PAR M. ALAIN GHOUILA-HOURI.

INTRODUCTION.

La notion de *flot* joue un rôle important en théorie des graphes. Cette notion revêt des aspects assez différents suivant qu'il s'agit de flots prenant leurs valeurs dans $\mathbf{R}$, dans $\mathbf{Z}$ ou dans $\mathbf{Z}/(2)$. Un flot à valeurs dans $\mathbf{Z}/(2)$ peut être identifié à l'ensemble des arêtes qui le supportent, et cet ensemble se décompose d'une manière unique en sous-ensembles, qui, géométriquement, forment des cycles; pour cette raison les flots à valeurs dans $\mathbf{Z}/(2)$ seront appelés *cycles*. Les flots à valeurs réelles interviennent dans l'étude des réseaux électriques — ce sont les intensités — mais ce sont les flots entiers et les cycles qui donnent lieu aux propriétés combinatoires les plus intéressantes. Dans les trois cas, les flots d'un multigraphe constituent un sous-module du module libre engendré formellement par l'ensemble des arêtes; les éléments orthogonaux à ce sous-module s'appellent les *tensions*; on appelle *cocycles* les tensions à valeurs dans $\mathbf{Z}/(2)$.

Il existe un parallélisme très net entre les propriétés des flots et celles des tensions; pour expliquer ce phénomène, W. T. Tutte a introduit la notion de *sous-groupe régulier* [29]. D'autre part, certaines propriétés importantes des flots et des tensions sont liées à la théorie des inégalités linéaires et à la notion de matrice *totalelement unimodulaire* [19], qui rejoint d'ailleurs la notion de sous-groupe régulier.

Dans le chapitre I, nous introduisons la notion de *famille distributive* de parties d'un module, et la notion d'*ensemble représentatif* d'un sous-module d'un module libre. Cela nous permet d'énoncer un théorème général de compatibilité, qui a comme conséquences particulières les conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'une solution pour un système d'inégalités linéaires en nombres réels, un système d'équations dans un corps, ou un système d'équations dans un anneau principal; de plus, ce théorème fait apparaître immédiatement le rôle particulier que jouent les sous-groupes réguliers dans la théorie des systèmes d'inégalités linéaires en nombres entiers.

Le chapitre II est consacré à l'étude des sous-groupes réguliers. Le passage aux entiers modulo 2 s'y révèle à maintes reprises comme un moyen de travail efficace, qui nous permet en particulier de caractériser les matrices totalement unimodulaires, généralisant ainsi un certain nombre de conditions suffisantes connues ([3], [16], [17], [19]). Des résultats contenus dans ce chapitre découlent de façon immédiate, au chapitre IV, les principales propriétés des flots et des tensions en nombres entiers (et réels).

Au chapitre III, la notion de *groupe de parties*, et la définition de deux opérations fondamentales qui sont l'*étrécissement* et la *suppression* d'arêtes nous permettent d'étudier de manière très synthétique les cycles et les cocycles. D'autre part, nous définissons et étudions les *assemblages de multigraphes* et nous obtenons ainsi, de manière assez rapide, une caractérisation des groupes *cocycliques* plus forte que celle qu'a donnée W. T. Tutte [32]; le théorème de Kuratowski [20] en découle directement.

Au chapitre V, nous généralisons aux graphes orientés quelconques certains résultats ([6], [8]) concernant l'existence de chemins et de circuits hamiltoniens dans les graphes symétriques. Bien que les conditions suffisantes que nous donnons respectent à peu près la dualité cycles-cocycles, leur démonstration est élémentaire, et il ne semble pas possible, dans l'état actuel des choses, d'aborder le problème de façon algébrique.

Un peu en marge des précédents, le chapitre VI contient deux théorèmes combinatoires. Le premier fournit une caractérisation des relations de *comparabilité*. Le second résout un problème posé par H. Kuhn [21].

Je tiens à exprimer ici toute ma gratitude à M. Berge pour ses nombreux conseils et suggestions. Je remercie M. Ville pour ses encouragements et l'intérêt qu'il a porté à mes travaux, et M. Lichnerowicz qui a bien voulu présider le Jury de thèse. Enfin, je voudrais remercier M. Deheuvels qui a accepté de compléter le Jury.

Ma reconnaissance va également à la Société Nationale des Chemins de Fer Français, et tout particulièrement à MM. Hutter et Fioc, directeurs successifs des Études Générales, qui m'ont donné la possibilité de poursuivre des recherches abstraites.

CHAPITRE I.

CONDITIONS DE COMPATIBILITÉ.

1. RAPPELS DE DÉFINITIONS. — Les notations utilisées dans cette thèse seront les notations classiques de la théorie des ensembles. Signalons toutefois que, pour noter le cardinal d'un ensemble X , nous écrivons $|X|$. Rappelons maintenant quelques définitions d'algèbre.

On appelle *anneau* un ensemble A sur lequel sont définies deux opérations :

1° Une addition, qui fait correspondre, à tout couple (x, y) d'éléments de A , un élément de A noté $x + y$; cette opération doit vérifier les propriétés suivantes :

- (1) $x + (y + z) = (x + y) + z$ quels que soient $x, y, z \in A$ (associativité);
- (2) $x + y = y + x$ quels que soient $x, y \in A$ (commutativité);
- (3) il existe un élément de A , appelé zéro vérifiant

$$x + 0 = x \text{ quel que soit } x \in A;$$

- (4) quel que soit $x \in A$, il existe un élément de A , noté $(-x)$, tel que

$$x + (-x) = 0.$$

2° Une multiplication, qui fait correspondre, à tout couple (x, y) d'éléments de A , un élément de A noté xy ; cette opération doit vérifier les propriétés suivantes :

- (1) $x(yz) = (xy)z$ quels que soient $x, y, z \in A$ (associativité);
- (2) $(x + y)z = xz + yz$ et $z(x + y) = zx + zy$ quels que soient $x, y, z \in A$ (distributivité par rapport à l'addition).

On peut résumer ces propriétés en disant qu'un anneau est un groupe abélien sur lequel est défini une multiplication associative et distributive (à droite et à gauche) par rapport à l'addition.

On appelle *idéal à gauche* (resp. *à droite*) d'un anneau A tout ensemble $F \subset A$ qui vérifie les propriétés (1) et (2) [resp. (1) et (2')] suivantes :

- (1) F est un sous-groupe de A ;
- (2) $\alpha \in A$ et $x \in F \Rightarrow \alpha x \in F$;
- (2') $\alpha \in A$ et $x \in F \Rightarrow x \alpha \in F$.

On appelle *idéal bilatère* tout ensemble qui est à la fois idéal à gauche et idéal à droite.

Un anneau A est dit *unitaire* s'il possède un élément unité, c'est-à-dire un élément, noté 1 , vérifiant

$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x \quad \text{quel que soit } x \in A.$$

Si a est un élément d'un anneau unitaire A , l'ensemble des éléments de A de la forme xa avec $x \in A$ (resp. de la forme ax avec $x \in A$) est un idéal à gauche (resp. à droite). Un tel idéal est dit *principal à gauche* (resp. *à droite*). Un anneau unitaire A est dit *principal à gauche* (resp. *à droite*) si tout idéal de A est principal à gauche (resp. à droite).

Un anneau A est dit *commutatif* si l'on a

$$xy = yx \quad \text{quels que soient } x, y \in A.$$

On appelle *anneau principal* un anneau unitaire commutatif dans lequel tout idéal est principal.

Si deux éléments non nuls a et b d'un anneau A vérifient $ab = 0$, on dit que a est un diviseur de zéro à gauche et que b est un diviseur de zéro à droite.

Dans un anneau unitaire, on dit que l'élément a' est inverse à gauche (resp. à droite) de l'élément a si l'on a $a'a = 1$ (resp. $aa' = 1$). Si a possède à la fois un inverse à gauche et un inverse à droite, ces deux inverses sont nécessairement égaux; on dit alors que a est *inversible* et l'on note a^{-1} l'élément unique qui vérifie

$$a^{-1}a = aa^{-1} = 1.$$

Un anneau unitaire dans lequel tous les éléments autres que zéro sont inversibles s'appelle un *corps*.

Étant donné un anneau A , on appelle *A-module à gauche* un groupe abélien E sur lequel est défini une opération externe appelée *multiplication scalaire* qui à tout couple $(\alpha, x) \in A \times E$ fait correspondre un élément $\alpha x \in E$, cette opération vérifiant les propriétés suivantes :

- (1) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ quels que soient $\alpha, \beta \in A$ et $x \in E$;
- (2) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ quels que soient $\alpha, \beta \in A$ et $x \in E$;
- (3) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ quels que soient $\alpha \in A$ et $x, y \in E$.

On définit de la même manière les A-modules à droite. Dans un A-module E, l'élément zéro s'appelle quelquefois l'*origine*. On dit que le A-module à gauche E est *unitaire* si A est unitaire et si l'on a

$$1 \cdot x = x \quad \text{quel que soit } x \in E.$$

Si K est un corps, un K-module à gauche unitaire s'appelle un *espace vectoriel à gauche* sur K.

Étant donné un A-module à gauche E, on dit qu'un ensemble $F \subset E$ est une *sous-module à gauche* de E si l'on a :

- (1) F est un sous-groupe de E;
- (2) $\alpha \in A$ et $x \in F \Rightarrow \alpha x \in F$.

Exemple 1. — Tout groupe abélien G peut être considéré comme un $\mathbf{Z}$ -module à gauche unitaire. Il suffit, pour cela, de considérer la multiplication scalaire qui, à tout entier n , et à tout $x \in G$, fait correspondre l'élément $nx \in G$ (où l'on appelle nx la somme de n éléments égaux à x). Les sous-modules à gauche de G ne sont autres alors que les sous-groupes de G.

Exemple 2. — Étant donné un anneau A, et un ensemble d'indices quelconque I, considérons l'ensemble A^I . Si a est un élément de A^I de coordonnées $(a_i)_{i \in I}$, et si b est un élément de A^I de coordonnées $(b_i)_{i \in I}$, on définit $a + b$ comme l'élément de A^I de coordonnées $(a_i + b_i)_{i \in I}$. Si a est un élément de A^I , et si α est un élément de A, on définit αa (resp. $a\alpha$) comme l'élément de A^I de coordonnées $(\alpha a_i)_{i \in I}$ [resp. $(a_i \alpha)_{i \in I}$]. On voit ainsi que A^I peut être considéré à la fois comme un A-module à gauche et comme un A-module à droite; si A est un anneau unitaire, A^I est un module unitaire. En prenant en particulier pour I un ensemble à un élément, on voit que A peut être considéré à la fois comme un A-module à gauche et comme un A-module à droite; les sous-modules de A ne sont autres que les idéaux de A.

Avant de terminer ce paragraphe, précisons quelques notations. Soit E un A-module. Étant donné $a \in E$ et $C \subset E$, on notera $a + C$ l'ensemble des éléments de la forme $a + c$, avec $c \in C$. Étant donné $C \subset E$, on notera $(-C)$ l'ensemble des éléments de la forme $(-c)$, avec $c \in C$. Étant donné C, $D \subset E$, on notera $C + D$ l'ensemble des éléments de la forme $c + d$, avec $c \in C$ et $d \in D$ ⁽²⁾.

Étant donné $\alpha \in A$ et $C \subset E$, on notera αC l'ensemble des éléments de la forme αc , avec $c \in C$, et l'on notera $\frac{1}{\alpha} C$ l'ensemble des éléments $x \in E$

(2) On évitera de confondre la notation $C + (-D)$, qui signifie « l'ensemble des éléments de la forme $c - d$, avec $c \in C$ et $d \in D$ », avec la notation usuelle $C - D$ qui signifie « l'ensemble des éléments de C qui n'appartiennent pas à D ».

tels que $\alpha x \in C$; dans le cas où α est inversible, on a $\frac{1}{\alpha} C = \alpha^{-1} C$; dans le cas où le A-module E est unitaire, on a

$$(-1)C = (-C).$$

2. FAMILLES DISTRIBUTIVES.

DÉFINITION. — Étant donné un A-module à gauche unitaire E, et un ensemble $S \subset A - \{0\}$ stable pour la multiplication (c'est-à-dire vérifiant $a, b \in S \Rightarrow ab \in S$) et contenant l'élément (-1) , nous appellerons *famille S-distributive* toute famille $\mathcal{C}$ de parties de E qui vérifie les axiomes suivants :

$$(M_1) \quad c \in E \text{ et } C \in \mathcal{C} \Rightarrow c + C \in \mathcal{C};$$

$$(M_2) \quad C, C' \in \mathcal{C} \Rightarrow C + C' \in \mathcal{C};$$

$$(M_3) \quad \alpha \in S \text{ et } C \in \mathcal{C} \Rightarrow \alpha C \text{ et } \frac{1}{\alpha} C \in \mathcal{C};$$

(M₄) Si des ensembles $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathcal{C}$ se rencontrent deux à deux, ils ont au moins un élément en commun (propriété de Helly).

Si $S = A - \{0\}$ on dira simplement que $\mathcal{C}$ est *distributive*.

Nous dirons qu'une famille S-distributive est *complète* si elle vérifie les axiomes suivants :

$$(M'_1) \quad c \in E \Rightarrow \{c\} \in \mathcal{C};$$

$$(M'_2) \quad C, C' \in \mathcal{C} \Rightarrow C \cap C' \in \mathcal{C}.$$

Citons, sans les démontrer, les deux propositions suivantes, que nous n'aurons pas à utiliser par la suite :

PROPOSITION 1. — Si S ne contient pas de diviseurs de zéro, toute famille S-distributive $\mathcal{C}$ est contenue dans une famille S-distributive complète.

PROPOSITION 2. — Soit une famille $\mathcal{C}$ de parties de E comprenant l'ensemble vide, et vérifiant

$$c \in E \text{ et } C \in \mathcal{C} \Rightarrow c + C \in \mathcal{C},$$

et soit $\mathcal{C}_0$ la famille des ensembles de $\mathcal{C}$ qui contiennent l'origine. Pour que $\mathcal{C}$ soit S-distributive complète, il faut et il suffit que $\mathcal{C}_0$ vérifie les axiomes suivants :

$$(L_1) \quad \{0\} \in \mathcal{C}_0;$$

$$(L_2) \quad C, C' \in \mathcal{C}_0 \Rightarrow C + C' \in \mathcal{C}_0 \text{ (stabilité pour l'addition);}$$

(L₃) $\alpha \in S$ et $C \in \mathcal{C}_0 \Rightarrow \alpha C \in \mathcal{C}_0$ et $\frac{1}{\alpha} C \in \mathcal{C}_0$ (stabilité pour la multiplication);

$$(L_4) \quad C, C' \in \mathcal{C}_0 \Rightarrow C \cap C' \in \mathcal{C}_0 \text{ (stabilité pour l'intersection);}$$

$$(L_5) \quad C, C', C'' \in \mathcal{C}_0 \Rightarrow C + (C' \cap C'') = (C + C') \cap (C + C'') \text{ (distributivité).}$$

3. ENSEMBLES REPRÉSENTATIFS. — Dans tout ce paragraphe, A sera un anneau unitaire, I un ensemble quelconque, et nous allons considérer le A -module à gauche A^I .

DÉFINITION. — On appellera *support* d'un élément $a \in A^I$ l'ensemble

$$S(a) = \{i/i \in I \text{ et } a_i \neq 0\}.$$

Étant donné une partie quelconque M de A^I , on appellera *support* de M tout support d'un élément de M ; *support minimal* de M tout élément minimal de la famille des supports non vides de M . Si F est un sous-module à gauche de A^I , et si K est une partie de I , nous noterons F_K le sous-module à gauche de A^I constitué par les éléments de F à support inclus dans K ; et nous noterons $L_{i,K}(i \in K)$ l'idéal à gauche de A constitué par les éléments de la forme a_i , avec $a \in F_K$. Nous dirons qu'un ensemble $B \subset F$ est un *ensemble représentatif* de F si, quel que soient $K \subset I$ et $i \in K$, il existe un élément $b \in B$ à support inclus dans K , tel que $L_{i,K}$ soit égal à l'idéal à gauche engendré par b_i .

PROPOSITION 1. — *Pour que F admette un ensemble représentatif, il faut et il suffit que tous les idéaux $L_{i,K}$ ($K \subset I$; $i \in K$) soient principaux à gauche. Si, de plus, I est fini, alors tout ensemble représentatif contient un ensemble représentatif fini.*

(Évident.)

Exemple. — Si A est un anneau principal à gauche, tout sous-module à gauche $F \subset A^I$ admet un ensemble représentatif.

PROPOSITION 2. — *Si F est un sous-module à gauche à supports finis de A^I , et si B est un ensemble représentatif de F , alors tout élément $a \in F$ est combinaison linéaire à gauche d'éléments de B à supports différents inclus dans celui de a .*

Soit i un élément de $S(a)$: il existe un élément $b^1 \in B$ et un élément $\lambda_1 \in A$ tels que

$$S(b^1) \subset S(a) \quad \text{et} \quad a_i = \lambda_1 b_i^1.$$

Posons $a^1 = a - \lambda_1 b^1$: on a

$$S(a^1) \subset S(a) - \{i\}.$$

Si $a^1 \neq 0$, on recommencera la même opération avec a^1 , Comme l'ensemble $S(a)$ est fini, on finira par trouver une différence

$$a - \lambda_1 b^1 - \lambda_2 b^2 - \dots - \lambda_m b^m = 0;$$

et les supports de b^1 , b^2 , ..., b^m sont distincts et inclus dans celui de a .

DÉFINITION. — Soit A un anneau unitaire. On appellera *partie complètement stable* de A tout ensemble $S \subset A - \{0\}$ stable pour la multiplication, contenant l'élément (-1) , et vérifiant

$$a = bc \quad \text{et} \quad a, c \in S \Rightarrow b \in S.$$

Soit S une partie complètement stable de A , et soit F un sous-module à gauche de A^1 : un ensemble $B \subset F$ sera dit *S-représentatif* s'il est représentatif et si

$$b \in B \text{ et } i \in S(b) \Rightarrow b_i \in S.$$

4. CONDITIONS DE COMPATIBILITÉ.

DÉFINITION. — Soit un A -module unitaire E , et un ensemble quelconque I . Si a est un élément de A^1 à support fini, et si x est un élément de E^1 , l'expression

$$\langle a, x \rangle = \sum_{i \in I} a_i x_i$$

définit un élément de E que nous appellerons le *produit scalaire* de a et de x . Si $\langle a, x \rangle = 0$, a et x seront dit *orthogonaux*.

Si M est une partie à supports finis de A^1 , l'ensemble des éléments de E^1 orthogonaux à tous les éléments de M est un sous-groupe (et non nécessairement un sous-module) de E^1 qu'on notera M^* ; soit F le sous-module à gauche de A^1 engendré par M : on a $F^* = M^*$.

THÉORÈME DE COMPATIBILITÉ. — Soient E un A -module unitaire, S une partie complètement stable de A , I un ensemble fini, et soit F un sous-module à gauche de A^1 admettant un ensemble S -représentatif B . Si $(C_i)_{i \in I}$ est une famille de parties de E appartenant toutes à une même famille S -distributive $\mathcal{C}$, les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) On a $F^* \cap \prod_{i \in I} C_i \neq \emptyset$;
- (2) Quel que soit $a \in F$, il existe $x \in \prod_{i \in I} C_i$ vérifiant $\langle a, x \rangle = 0$;
- (3) Quel que soit $b \in B$, il existe $x \in \prod_{i \in I} C_i$ vérifiant $\langle b, x \rangle = 0$.

Nous pouvons toujours supposer que $\mathcal{C}$ contient toutes les parties à un élément de E , et d'autre part, puisque I est fini, que B est fini.

On a évidemment $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$. Nous allons montrer que $(3) \Rightarrow (1)$, en raisonnant par récurrence sur $|I|$. La propriété est évidente pour $|I| = 1$. Supposons donc $|I| > 1$, et remarquons tout d'abord que si les ensembles $(C_i)_{i \in I}$ se réduisent chacun à un élément, la propriété est bien vérifiée.

Nous allons voir maintenant que si, la proposition (3) étant vérifiée, un des ensembles $(C_i)_{i \in I}$, soit C_{i_0} , ne se réduit pas à un élément, alors il est possible de trouver $c \in C_{i_0}$ tel que la famille $(C'_i)_{i \in I}$ d'ensembles de $\mathcal{C}$ définie par

$$C'_i = \begin{cases} \{c\} & \text{pour } i = i_0, \\ C_i & \text{pour } i \neq i_0 \end{cases}$$

vérifie (3). En opérant cette réduction autant de fois qu'il est nécessaire, on se ramènera au cas précédent, et l'on verra ainsi que la proposition (1) est bien vérifiée.

Posons $J = I - \{i_0\}$: il s'agit de montrer qu'il existe un élément $c \in C_{i_0}$ vérifiant

$$-b_{i_0}c \in \sum_{i \in J} b_i C_i \quad \text{quel que soit } b \in B.$$

Or, $B \cap F_J$ étant un ensemble S-représentatif de F_J , il existe, d'après l'hypothèse de récurrence, un élément $x \in \prod_{i \in J} C_i$ vérifiant

$$\sum_{i \in J} a_i x_i = 0 \quad \text{quel que soit } a \in F_J.$$

Soit B^+ l'ensemble des $b \in B$ tel que $b_{i_0} \neq 0$. Si B^+ est vide, la propriété est évidente. Sinon, soit $b^0 \in B^+$ tel que $L_{b^0, 1}$ est l'idéal à gauche de A engendré par $\alpha = b_{i_0}^0 \in S$. Si b est un élément quelconque de B^+ , b_{i_0} est de la forme $b_{i_0} = \lambda_b \alpha$, et l'on a $\lambda_b \in S$, puisque S est complètement stable. Posons alors

$$D_b = \sum_{i \in J} b_i C_i \in \mathcal{C}, \quad X_b = \frac{1}{\lambda_b} D_b \in \mathcal{C}$$

et

$$d_b = - \sum_{i \in J} b_i x_i \in D_b.$$

Considérons $h = \lambda_b b^0 - b \in F_J$: on a

$$\lambda_b d_{b^0} - d_b = - \sum_{i \in J} h_i x_i = 0.$$

On a ainsi

$$d_{b^0} \in X_b \quad \text{quel que soit } b \in B^+.$$

Par ailleurs, quel que soit $b \in B^+$, il existe $y \in \prod_{i \in I} C_i$ tel que $\langle b, y \rangle = 0$;

et l'on a

$$\lambda_b \alpha y_{i_0} = - \sum_{i \in J} b_i y_i \in D_b.$$

On voit ainsi que l'ensemble αC_{i_0} rencontre chacun des ensembles $(X_b)_{b \in B^+}$. Or ces ensembles contiennent tous d_{b^0} , et *a fortiori* se rencontrent deux à deux. Comme la famille $\mathcal{C}$ est S-distributive, il existe par conséquent un élément $c \in C_{i_0}$ tel que

$$\alpha c \in X_b \quad \text{quel que soit } b \in B^+;$$

et l'on a

$$b_{i_0} c = \lambda_b \alpha c \in D_b = - \sum_{i \in J} b_i C_i \quad \text{quel que soit } b \in B^+.$$

C. Q. F. D.

Nous allons voir maintenant que le théorème précédent est, dans une large mesure, maximal. En effet, étant donné un A -module unitaire E et une partie complètement stable $S \subset A$, demandons-nous quelles conditions doit vérifier une famille $\mathcal{C}$ de parties de E pour que l'énoncé suivant soit vrai :

« Quels que soient l'ensemble fini I , la famille $(C_i)_{i \in I}$ d'ensemble de $\mathcal{C}$, et le sous-module à gauche $F \subset A^I$ admettant un ensemble S -représentatif B , tels que

$$b \in B \Rightarrow \text{il existe } x \in \prod_{i \in I} C_i \text{ vérifiant } \langle b, x \rangle = 0,$$

on a

$$F^* \cap \prod_{i \in I} C_i \neq \emptyset. \quad »$$

L'ensemble $\mathcal{S}$ des familles $\mathcal{C}$ qui vérifient cet énoncé est évidemment inductif pour la relation d'inclusion, et l'on a

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{C}', \quad \mathcal{C}' \in \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{C} \in \mathcal{S}.$$

On peut donc toujours supposer que $\mathcal{C}$ est maximale.

1° Soient $C, C' \in \mathcal{C}$. On peut constater que la famille obtenue en ajoutant $C + C'$ à la famille $\mathcal{C}$ vérifie l'énoncé. Comme $\mathcal{C}$ est maximale, on a $C + C' \in \mathcal{C}$.

2° Soient $\alpha \in S$ et $C \in \mathcal{C}$. On voit de même que $\mathcal{C} \cup \{\alpha C\}$ vérifie l'énoncé, donc que $\alpha C \in \mathcal{C}$.

3° Soient $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathcal{C}$, et soit dans A^n l'ensemble B des éléments de la forme b^{i_1, i_2} ($i_1 \neq i_2$), où

$$b_{i_1, i_2}^{i_1, i_2} = 1, \quad b_{i_2, i_1}^{i_1, i_2} = -1 \quad \text{et} \quad S(b^{i_1, i_2}) = \{i_1, i_2\}.$$

B est un ensemble S -représentatif du sous-module à gauche F qu'il engendre. Comme $\mathcal{C}$ vérifie l'énoncé, on voit immédiatement que si les ensembles $C_1, C_2, \dots, C_n$ se rencontrent deux à deux, alors ils ont au moins un élément commun.

Des considérations qui précèdent, il résulte que si les éléments de S sont tous inversibles, toute famille $\mathcal{C}$ qui vérifie l'énoncé et qui, de plus, est invariante par translation [c'est-à-dire qui vérifie l'axiome (M_1)] est contenue dans une famille S -distributive.

Le théorème de compatibilité établit un lien entre la théorie des systèmes d'inégalités linéaires et la théorie des systèmes d'équations linéaires, comme vont le montrer les exemples suivants.

Exemple 1. — En prenant pour E le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels (considéré comme $\mathbf{R}$ -module), en prenant $S = \mathbf{R} - \{0\}$ et en remarquant que la famille $\mathcal{C}$ des intervalles de $\mathbf{R}$ est distributive, on obtient l'énoncé suivant :

« Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$, et soient des nombres $a_1, a_2, \dots, a_n$ (pouvant éventuellement être égaux à $-\infty$) et des nombres $b_1, b_2, \dots, b_n$ (pouvant éventuellement être égaux à $+\infty$) vérifiant

$$a_i \leq b_i \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n$$

et soit un entier s avec $0 \leq s \leq n$. Pour qu'il existe un point $x \in F^*$ vérifiant

$$a_i \leq x_i \leq b_i \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n,$$

cette double inégalité étant vérifiée strictement pour $i > s$, il faut et il suffit que

$$a_i < b_i \quad \text{pour } i > s,$$

et que, quel que soit $y \in F$, on ait, en posant

$$I_+ = \{i/y_i > 0\} \quad \text{et} \quad I_- = \{i/y_i < 0\},$$

$$\sum_{i \in I_+} y_i b_i + \sum_{i \in I_-} y_i a_i \geq 0$$

[et aussi

$$\sum_{i \in I_+} y_i a_i + \sum_{i \in I_-} y_i b_i \leq 0;$$

mais on peut omettre dans l'énoncé cette inégalité, car elle se déduit de la précédente en changeant y en $(-y)$], avec l'inégalité vérifiée strictement chaque fois que $I_+ \cup I_-$ rencontre l'ensemble $\{i/i > s\}$. »

Exemple 2. — En prenant pour E un anneau principal quelconque A (considéré comme A -module), en prenant $S = A - \{0\}$, et en remarquant que la famille $\mathcal{C}$ des ensembles de la forme $\alpha + F$, où $\alpha \in A$ et où F est un idéal de A , c'est-à-dire la famille des ensembles de la forme

$$L_{\alpha, \beta} = \{x/x = \alpha + \beta y, \text{ avec } y \in A\}, \quad \text{avec } \alpha, \beta \in A,$$

est distributive, on obtient l'énoncé suivant :

« Étant donné des éléments a_i^j ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) et des éléments b_i ($i = 1, 2, \dots, m$) de l'anneau principal A , pour que le système d'équations

$$\sum_{j=1}^n a_i^j x_j = b_i \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, m,$$

admette au moins une solution, il faut et il suffit que, quels que soient $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^m \in A$, l'élément

$$\gamma = \sum_{i=1}^m \lambda^i b_i$$

appartienne à l'idéal engendré par les éléments $\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^n$, où l'on pose

$$\gamma^j = \sum_{i=1}^m \lambda^i a_i^j \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, n.$$

Exemple 3. — En prenant pour E un corps K , commutatif ou non (considéré comme K -module), en prenant $S = K - \{0\}$, et en remarquant, d'une part que K est un anneau principal à gauche, d'autre part que les seuls idéaux à droite de K sont $\{0\}$ et K , donc que le treillis des idéaux est distributif, on obtient l'énoncé suivant :

« Étant donné des éléments $a_i^j (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ et des éléments $b_i (i = 1, 2, \dots, m)$ du corps K , pour que le système d'équations

$$\sum_{j=1}^n a_i^j x_j = b_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, m,$$

admette au moins une solution, il faut et il suffit que, quels que soient les éléments $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^m \in K$ vérifiant

$$\sum_{i=1}^m \lambda^i a_i^j = 0 \quad \text{pour } j = 1, \dots, n,$$

on ait

$$\sum_{i=1}^m \lambda^i b_i = 0.$$

CHAPITRE II.

SOUS-GROUPES RÉGULIERS.

1. SOUS-MODULES RÉGULIERS. — Dans tout ce qui suit, A sera un anneau unitaire, et I un ensemble fini. Nous dirons qu'un élément $a \in A^I$ est *simple* si toutes ses coordonnées non nulles sont des éléments inversibles de A . Étant donné un sous-module à gauche $F \subset A^I$, et un élément $a \in F$, nous dirons que a est un élément *primitif* de F si a est simple et si $S(a)$ est un support minimal de F . Un sous-module à gauche $F \subset A^I$ sera dit *régulier* s'il admet un ensemble représentatif dont tous les éléments sont simples; autrement

dit, un sous-module à gauche régulier est un sous-module à gauche qui admet un ensemble U-représentatif, U étant l'ensemble (complètement stable) des éléments inversibles de A.

PROPOSITION 1. — *Étant donné un sous-module à gauche $F \subset A^1$, les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *F est régulier;*
- (2) *Tout support minimal de F est le support d'un élément primitif de F;*
- (3) *Les idéaux à gauche $L_{i,K}$ sont égaux, soit à $\{0\}$, soit à A.*

On a évidemment $(2) \Rightarrow (1) \Rightarrow (3)$; reste à montrer que $(3) \Rightarrow (2)$. Supposons donc (3) vérifiée, et soit K un support minimal de F. A tout $i \in K$, on peut associer un élément $a^i \in F_K$ tel que $a^i_i = 1$. Quels que soient $i, j \in K$, on a

$$b = a^j - a^i a^i \in F_{K - \{i\}}$$

donc $b = 0$, ce qui entraîne $b_j = 1 - a^i a^i_j = 0$: on voit ainsi que tous les éléments a^i_j sont inversibles. Tous les éléments a^i considérés sont donc primitifs : *a fortiori*, (2) est vérifiée.

Exemple. — Si A est un corps, tout sous-module à gauche de A^1 est régulier.

DÉFINITION. — Étant donné un sous-module à gauche (ou à droite) régulier $F \subset A^1$, nous dirons qu'un ensemble $V \subset I$ est un *arbre associé* à F s'il rencontre tous les supports non vides de F, et s'il est minimal avec cette propriété.

Si F est un sous-module à gauche de A^1 , nous noterons F^* l'ensemble des $x \in A^1$ tels que

$$\langle a, x \rangle = 0 \quad \text{quel que soit } a \in F;$$

F^* est un sous-module à droite de A^1 . De même, si F est un sous-module à droite, nous noterons F^* l'ensemble des $x \in A^1$ tels que

$$\langle x, a \rangle = 0 \quad \text{quel que soit } a \in F;$$

F^* est un sous-module à gauche de A^1 .

PROPOSITION 2. — *Si F est un sous-module à gauche régulier de A^1 , les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *V est un arbre associé à F;*
- (2) *L'application de restriction $(a_i)_{i \in I} \rightarrow (a_i)_{i \in V}$ de F dans A^V est un isomorphisme;*
- (3) *V rencontre tous les supports non vides de F, et $\bigcap V$ rencontre tous les supports non vides de F^* .*

(1) $\Rightarrow$ (2) : Soit V un arbre, et soit $i \in V$. Il existe au moins un support minimal de F qui ne rencontre pas $V - \{i\}$. Il existe donc un élément primitif $a^{i,V} \in F$ tel que $a_i^{i,V} = 1$ et $S(a^{i,V}) \cap V = \{i\}$. Quel que soit $a \in F$ l'élément

$$a - \sum_{i \in V} a_i a^{i,V}$$

a un support qui ne rencontre pas V , donc est nul.

(2) $\Rightarrow$ (3) : Supposons que l'application $(a_i)_{i \in I} \rightarrow (a_i)_{i \in V}$ soit un isomorphisme de F sur A^V . Alors, pour tout $i \in V$, il existe un élément unique $a^{i,V} \in F$ tel que $a_i^{i,V} = 1$ et $S(a^{i,V}) \cap V = \{i\}$; on a

$$a = \sum_{i \in V} a_i a^{i,V} \quad \text{quel que soit } a \in F.$$

Ceci dit, nous allons voir que l'application

$$(a_i)_{i \in I} \rightarrow (a_i)_{i \in \mathbb{C}^V} \text{ de } F^* \text{ dans } A^{\mathbb{C}^V}$$

est un isomorphisme. En effet, quel que soit $(x_i)_{i \in \mathbb{C}^V} \in A^{\mathbb{C}^V}$, il existe un élément $(\bar{x}_i)_{i \in I} \in F^*$ et un seul tel que

$$\bar{x}_i = x_i \quad \text{quel que soit } i \in \mathbb{C}^V;$$

cet élément est défini en prenant

$$\bar{x}_i = - \sum_{j \in \mathbb{C}^V} a_j^{i,V} x_j \quad \text{quel que soit } i \in V.$$

Il est maintenant évident que (3) est vérifié.

(3) $\Rightarrow$ (1) : En effet, soit $W \subset V$ un arbre associé à F . Nous avons vu que l'application $(a_i)_{i \in I} \rightarrow (a_i)_{i \in \mathbb{C}^W}$ de F^* dans $A^{\mathbb{C}^W}$ est un isomorphisme. Or, $\mathbb{C}^V$ rencontrant tous les supports de F^* , l'application $(a_i)_{i \in I} \rightarrow (a_i)_{i \in \mathbb{C}^V}$ de F^* dans $A^{\mathbb{C}^V}$ est injective. Comme $\mathbb{C}^W \supset \mathbb{C}^V$, on a nécessairement $W = V$.

PROPOSITION 3. — *Si F est un sous-module à gauche régulier de A^1 , alors F^* est régulier et l'on a $(F^*)^* = F$. Les arbres de F^* sont les complémentaires des arbres de F .*

Il s'agit d'abord de montrer que tous les idéaux à droite $L_{i,K}$ associés à F^* sont égaux, soit à $\{0\}$, soit à A (cf. la proposition 1). Remarquons au préalable que le sous-module $(F^*)_K$ constitué par les éléments de F^* à supports inclus dans K est égal à $(F^K)^*$, en appelant F^K le sous-module

à gauche engendré par F et par les éléments de A^1 à supports inclus dans $\bigcup K$; or F^k est évidemment régulier, et par ailleurs l'idéal à droite $L_{i,k}$ est égal à l'idéal $L'_{i,1}$ associé à $(F^*)_k$. Il nous suffit donc de démontrer la propriété pour les idéaux $L_{i,1}$. Distinguons deux cas :

Premier cas. — $I - \{i\}$ rencontre tous les supports non vides de F . Il existe alors un arbre V associé à F tel que $i \notin V$. Il est alors possible de trouver un élément $x \in F^*$ tel que $x_i = 1$. On a donc $L_{i,1} = A$.

Deuxième cas. — Il existe un élément $a \in F$ tel que $S(a) = \{i\}$. F étant régulier, on peut toujours supposer $a_i = 1$, et l'on a

$$x \in F^* \Rightarrow a_i x_i = x_i = 0, \quad \text{d'où} \quad L_{i,1} = \{0\}.$$

Nous voyons ainsi que F^* est régulier. Soit maintenant V un arbre de F : l'application $(a_i)_{i \in I} \rightarrow (a_i)_{i \in \bigcup V}$ de F^* dans $A^{\bigcup V}$ est un isomorphisme (il suffit, pour le voir de se reporter à la démonstration de la proposition 2); donc $\bigcup V$ est un arbre de F^* . On a $(F^*)^* \supset F$, et V est un arbre de $(F^*)^*$: il est, dans ces conditions, évident que $(F^*)^* = F$.

PROPOSITION 4. — *Tous les arbres d'un sous-module régulier ont même nombre d'éléments.*

Soient deux arbres V et W d'un même sous-module régulier F , avec $|V| \leq |W|$. Nous allons supposer que si $|V| < r$, on a nécessairement $|V| = |W|$, et nous allons voir que pour $|V| = r$, on a aussi l'égalité.

En effet, soit $i \in W$, et considérons $F_{I-\{i\}}$: on a $F_{I-\{i\}} \neq F$. Il en résulte que l'image de $F_{I-\{i\}}$ par l'application $(a_i)_{i \in I} \rightarrow (a_i)_{i \in V}$ n'est pas égale à A^V . Comme V rencontre tous les supports de $F_{I-\{i\}}$, il existe un arbre V' de $F_{I-\{i\}}$ inclus dans V , et l'on a $V' \neq V$. Or $W - \{i\}$ est un arbre de $F_{I-\{i\}}$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$|V'| = |W| - 1, \quad \text{d'où} \quad |V| \geq |V'| + 1 = |W|.$$

Cela entraîne évidemment $|V| = |W|$.

DÉFINITION. — Étant donné un sous-module régulier F , on appellera *dimension* de F le nombre d'éléments d'un arbre de F .

2. ESPACE VECTORIEL $\mathcal{E}(I)$. — Dans le cas où A est le corps des entiers modulo 2, tout élément de A est défini de manière unique par son support. On peut donc identifier les éléments de A^1 à leurs supports : on définit ainsi une structure d'espace vectoriel sur l'ensemble des parties de I ; nous appellerons $\mathcal{E}(I)$ l'espace vectoriel ainsi obtenu. La somme de deux

parties de I se notera en utilisant le signe $+$. Précisons quelques propriétés de $\mathcal{X}(I)$:

(1) La somme $A + B$ de deux parties A et B de I est l'ensemble des éléments de I qui appartiennent à un et un seul de ces deux ensembles;

(2) La somme de m parties de I , $A_1, A_2, \dots, A_m$, qui se note $\sum_{i=1}^m A_i$, est l'ensemble des éléments de I qui appartiennent à un nombre impair d'entre les ensembles $A_1, A_2, \dots, A_m$;

(3) L'élément nul de $\mathcal{X}(I)$ est l'ensemble vide;

(4) Tout élément de $\mathcal{X}(I)$ est son propre opposé : on a $A + A = \emptyset$ quel que soit $A \subset I$;

(5) A et B étant donnés, l'équation $A + X = B$ admet pour solution unique $X = A + B$;

(6) Si $A \subset B$, on a $\bigcup^n A = A + B$;

(7) Le produit scalaire de deux ensembles $A, B \subset I$ est

$$\langle A, B \rangle \equiv |A \cap B| \pmod{2};$$

(8) On a $1.A = A$ et $0.A = \emptyset$ quel que soit $A \subset I$;

(9) Tout sous-groupe de $\mathcal{X}(I)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{X}(I)$;

(10) Soit V une partie de I . La restriction $f \rightarrow f_V$ est une application linéaire de E^I dans E^V . En passant aux supports, on voit que l'application $A \rightarrow V \cap A$ est une application linéaire de $\mathcal{X}(I)$ dans $\mathcal{X}(V)$.

Remarque. — La dernière propriété montre que la multiplication définie sur $\mathcal{X}(I)$ par $A.B = A \cap B$ est distributive par rapport à l'addition. Cette multiplication définit sur $\mathcal{X}(I)$ une structure d'anneau commutatif, avec I comme élément unité. L'anneau obtenu s'appelle l'*anneau de Boole* de l'ensemble I . Cependant, nous n'aurons pas à utiliser cette structure d'anneau : lorsque nous parlerons de $\mathcal{X}(I)$, il s'agira seulement de la structure d'espace vectoriel.

3. SOUS-GROUPES RÉGULIERS. — Nous allons, à partir de maintenant, nous limiter au cas où A est égal à l'anneau $\mathbf{Z}$ des entiers. Un élément $a \in \mathbf{Z}^I$ est simple si ses coordonnées sont égales à 0, +1 ou -1. On sait que tout sous-groupe de $\mathbf{Z}^I$ est en même temps un sous-module : on pourra ainsi parler de sous-groupes réguliers de $\mathbf{Z}^I$. En tenant compte de la proposition 1 du paragraphe 1, on retrouve la définition donnée par W. T. Tutte [29] : un sous-groupe $F \subset \mathbf{Z}^I$ est dit régulier si, pour tout élément $a \in F$, il existe un élément simple non nul $b \in F$ tel que $S(b)$ est contenu dans $S(a)$.

Comme l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbf{Z}$ est $U = \{-1, +1\}$, et comme la famille des intervalles, finis ou non, de $\mathbf{Z}$ est U -distributive, on peut déduire du théorème de compatibilité la proposition suivante :

PROPOSITION 1. — Soit F un sous-groupe régulier de $\mathbf{Z}^I$ et soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ deux familles d'entiers, finis ou infinis, vérifiant

$$a_i \leq b_i \quad \text{quel que soit } i \in I,$$

Pour qu'il existe un élément $x \in F$ tel que

$$a_i \leq x_i \leq b_i \quad \text{quel que soit } i \in I.$$

il faut et il suffit que pour tout élément primitif c de F^* , on ait

$$\sum_{i \in S^+(c)} b_i - \sum_{i \in S^-(c)} a_i \geq 0,$$

en posant

$$S^+(c) = \{i/i \in I \text{ et } c_i = 1\} \quad \text{et} \quad S^-(c) = \{i/i \in I \text{ et } c_i = -1\}.$$

PROPOSITION 2 [29]. — Soit F un sous-groupe régulier de $\mathbf{Z}^I$ et soit un entier $q > 1$. Quel que soit $a \in F$, il existe $b \in F$ vérifiant

$$|b_i| < q \quad \text{et} \quad a_i \equiv b_i \pmod{q} \quad \text{quel que soit } i \in I.$$

La proposition précédente va nous permettre de donner ici une démonstration très simple. En effet, il s'agit de montrer qu'il existe un élément $x \in F$ tel que

$$|a_i - qx_i| < q \quad \text{quel que soit } i \in I.$$

Or l'ensemble défini par cette inégalité est un intervalle : il nous suffit donc de montrer que pour tout élément simple $c \in F^*$, il existe $b \in \mathbf{Z}^I$ vérifiant $\langle c, b \rangle = 0$ et

$$|b_i| < q \quad \text{et} \quad a_i \equiv b_i \pmod{q} \quad \text{quel que soit } i \in I.$$

Soit D l'ensemble des éléments $x \in \mathbf{Z}^I$ qui vérifient $\langle c, x \rangle = 0$ et

$$a_i \equiv x_i \pmod{q} \quad \text{quel que soit } i \in I;$$

et à tout $x \in D$ associons l'entier

$$d(x) = \text{Min} \left\{ \sum_{i \in I} |y_i| / |x_i - qy_i| < q \quad \text{quel que soit } i \in I \right\}.$$

Si b est un élément de D qui minimise $d(x)$, on a nécessairement

$$|b_i| < q \quad \text{quel que soit } i \in I.$$

DÉFINITION. — Soit $a \in Z^1$. On appellera *support d'imparité* de a l'ensemble

$$\dot{S}(a) = \{ i / i \in I \text{ et } a_i \equiv 1 \pmod{2} \}.$$

On a évidemment $\dot{S}(a) \subset S(a)$. Si a est simple, on a $\dot{S}(a) = S(a)$. Étant donné un sous-groupe $F \subset Z^1$, les supports d'imparité des éléments de F constituent un sous-groupe de $\mathfrak{T}(I)$ qu'on notera $\dot{S}(F)$.

PROPOSITION 3. — Si F est un sous-groupe régulier, alors quel que soit $a \in F$, il existe un élément simple $b \in F$ tel que $S(b) = \dot{S}(a)$. Autrement dit, les éléments de $\dot{S}(F)$ sont les supports des éléments simples de F .

Cela résulte immédiatement de la proposition 2, en prenant $q = 2$.

PROPOSITION 4. — Si F est un sous-groupe régulier, tout arbre de F est un arbre de $\dot{S}(F)$, et réciproquement; F et $\dot{S}(F)$ ont même dimension.

(Évident.)

PROPOSITION 5. — Si F est un sous-groupe régulier, on a

$$\dot{S}(F^*) = \dot{S}^*(F).$$

Soient $A \in \dot{S}(F)$ et $B \in \dot{S}(F^*)$: il existe deux éléments $a \in F$ et $b \in F^*$ tels que $\dot{S}(a) = A$ et $\dot{S}(b) = B$. On a

$$\langle A, B \rangle \equiv \sum_{i \in I} a_i b_i \equiv 0 \pmod{2}.$$

Il en résulte qu'on a $\dot{S}(F^*) \subset \dot{S}^*(F)$. Or on a, par ailleurs,

$$\dim \dot{S}(F^*) = \dim F^* = |I| - \dim F = |I| - \dim \dot{S}(F) = \dim \dot{S}^*(F);$$

d'où l'égalité

$$\dot{S}(F^*) = \dot{S}^*(F).$$

PROPOSITION 6. — Pour qu'un sous-groupe $F \subset Z^1$ soit régulier, il faut et il suffit que les supports des éléments simples de F constituent un sous-groupe de $\mathfrak{T}(I)$ ayant même dimension que le sous-espace vectoriel F' de R^1 engendré par F .

Supposons que F est régulier. L'ensemble des supports des éléments simples de F n'est autre que le sous-groupe $\dot{S}(F)$. D'autre part, soit V un arbre de F , et soient les éléments $a^{i,V}$ ($i \in V$) de F définis par

$$S(a^{i,V}) \cap V = \{i\} \quad \text{et} \quad a^{i,V} = 1;$$

F' n'est autre que le sous-espace vectoriel engendré par les éléments $a^{i,V}$ ($i \in V$); on a donc

$$\dim F' = |V| = \dim \dot{S}(F).$$

Inversement, supposons que les supports des éléments simples de F constituent un sous-groupe S de $\mathfrak{F}(I)$: on a $S \subset \dot{S}(F)$. Posons $\dim F' = r$, et soient $a^1, a^2, \dots, a^{r+1}$ des éléments quelconques de F : il existe des entiers non tous nuls $n_1, n_2, \dots, n_{r+1}$ tels que

$$n_1 a^1 + n_2 a^2 + \dots + n_{r+1} a^{r+1} = 0,$$

et l'on peut toujours supposer que ces entiers ne sont pas tous pairs; on a alors

$$n_1 \dot{S}(a^1) + n_2 \dot{S}(a^2) + \dots + n_{r+1} \dot{S}(a^{r+1}) = \emptyset.$$

On voit ainsi qu'on a $\dim \dot{S}(F) \leq r$. Supposons maintenant qu'on a $\dim S = r$; il en résulte

$$S = \dot{S}(F) \quad \text{et} \quad \dim \dot{S}(F) = r.$$

Il est possible de trouver alors des éléments simples $a^1, a^2, \dots, a^r \in F$ dont les supports sont linéairement indépendants. Si a est un élément non nul quelconque de F , il existe une relation de la forme

$$na = n_1 a^1 + n_2 a^2 + \dots + n_r a^r, \quad \text{avec} \quad n \neq 0.$$

Soit alors 2^k la plus grande puissance de 2 divisant les nombres $n_1, n_2, \dots, n_r$, on a

$$na = 2^k (n'_1 a^1 + n'_2 a^2 + \dots + n'_r a^r),$$

en posant

$$n_i = 2^k n'_i \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Soit b l'élément simple de F qui a pour support l'ensemble non vide

$$n'_1 \dot{S}(a^1) + n'_2 \dot{S}(a^2) + \dots + n'_r \dot{S}(a^r),$$

on a $S(b) \subset S(a)$. On voit ainsi que F est régulier.

DÉFINITION. — On dit qu'une matrice (m_{ij}^i) ($i \in I; j \in J$) est *totale* *ment unimodulaire* si le déterminant de toute sous-matrice carrée est égal à 0, +1 ou -1; il faut, en particulier, que tous les termes de cette matrice soient égaux à 0, +1 ou -1.

THÉORÈME FONDAMENTAL [13]. — Soit une matrice $M = (m_{ij}^i)$ ($i \in I; j \in J$) dont les termes sont égaux à 0, +1 ou -1. A tout ensemble $A \subset I$ associons l'ensemble

$$\Delta A = \left\{ j/j \in J \text{ et } \sum_{i \in A} m_{ij}^i \equiv 0 \pmod{2} \right\}.$$

Les six propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) M est totalement unimodulaire;
 (2) Tout ensemble non vide $A \subset I$ peut être partitionné ⁽³⁾ en deux ensembles A_1 et A_2 de manière telle que

$$\sum_{i \in A_1} m_j^i - \sum_{i \in A_2} m_j^i = 0, +1 \text{ ou } -1 \quad \text{quel que soit } j \in J;$$

- (3) Tout ensemble non vide $A \subset I$ peut être partitionné en deux ensembles A_1 et A_2 de manière telle que

$$j \in \Delta A \Rightarrow \sum_{i \in A_1} m_j^i = \sum_{i \in A_2} m_j^i;$$

- (4) Pour tout ensemble non vide $A \subset I$, il existe deux ensembles disjoints A_1 et A_2 , non tous deux vides, et inclus dans A , tels que

$$j \in \Delta A \Rightarrow \sum_{i \in A_1} m_j^i = \sum_{i \in A_2} m_j^i;$$

- (5) Quel que soit l'ensemble non vide $A \subset I$, la sous-matrice $M_{\Delta A}^A$ est de rang inférieur à $|A|$;

- (6) Le déterminant de toute sous-matrice carrée est ou bien nul ou bien impair.

Remarquons tout d'abord que l'application φ de $\mathfrak{R}(I)$ dans $\mathfrak{R}(I)$ définie par $\varphi(A) = J - \Delta A$ est linéaire.

1° On a évidemment $(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5)$.

2° Montrons que $(5) \Rightarrow (6)$. Soit M_B^A une sous-matrice carrée dont le déterminant est pair : il existe un ensemble non vide $A' \subset A$ tel que

$$j \in B \Rightarrow \sum_{i \in A'} m_j^i \equiv 0 \pmod{2}.$$

On a $B \subset \Delta A'$: la sous-matrice $M_B^{A'}$ est donc de rang inférieur à $|A'|$; il en résulte que le déterminant de M_B^A est nul.

3° Montrons que $(1) \Rightarrow (2)$. Pour cela, il nous suffit de montrer que si M est totalement unimodulaire, alors l'ensemble I peut être partitionné en deux ensembles I_1 et I_2 de façon telle que

$$\sum_{i \in I_1} m_j^i - \sum_{i \in I_2} m_j^i = 0, +1 \text{ ou } -1 \quad \text{quel que soit } j \in J.$$

(3) Nous disons ici que A_1 et A_2 partitionnent A si l'on a

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset \quad \text{et} \quad A_1 \cup A_2 = A;$$

il n'est pas nécessaire pour cela que A_1 et A_2 soient non vides.

Nous allons raisonner par récurrence sur $|I|$. Soit ψ l'application linéaire de $\mathcal{X}(I)$ dans $\mathcal{X}(\Delta I)$ définie par

$$\psi(A) = \Delta I \cap \varphi(A);$$

on a $\psi(I) = \emptyset$, ce qui entraîne que le sous-groupe $G = \psi[\mathcal{X}(I)]$ de $\mathcal{X}(\Delta I)$ a une dimension inférieure à $|I|$. Distinguons maintenant deux cas :

Premier cas. — Il existe un ensemble non vide $A \neq I$ tel que $\psi(A) = \emptyset$. On a alors $\psi(A) \cap \varphi(I - A) = \emptyset$. D'après l'hypothèse de récurrence, on peut partitionner A en deux ensembles A_1 et A_2 , $I - A$ en deux ensembles A'_1 et A'_2 , de façon telle que

$$\begin{aligned} \sum_{i \in A_1} m_j^i - \sum_{i \in A_2} m_j^i &= \begin{cases} 0 & \text{pour } j \in \Delta A, \\ \pm 1 & \text{pour } j \in \varphi(A); \end{cases} \\ \sum_{i \in A'_1} m_j^i - \sum_{i \in A'_2} m_j^i &= \begin{cases} 0 & \text{pour } j \in \Delta(I - A), \\ \pm 1 & \text{pour } j \in \varphi(I - A). \end{cases} \end{aligned}$$

On a alors

$$\sum_{i \in A_1 \cup A'_1} m_j^i - \sum_{i \in A_2 \cup A'_2} m_j^i = 0, +1 \text{ ou } -1 \quad \text{quel que soit } j \in J.$$

Deuxième cas. — On a

$$A \neq \emptyset, \quad A \neq I \quad \text{et} \quad A \subset I \Rightarrow \psi(A) \neq \emptyset;$$

G est alors de dimension $|I| - 1$. Soit $V \subset \Delta I$ un arbre de G . Pour tout $i \in I$, le déterminant de $M_V^{I - \{i\}}$ est différent de 0; car, dans le cas contraire, il existerait un ensemble non vide $A \subset I - \{i\}$ tel que $\Delta A \supset V$. Identifions maintenant les éléments de I aux entiers $1, 2, \dots, n$ et posons

$$\alpha_i = (-1)^i \det M_V^{I - \{i\}} \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n.$$

On a

$$\left| \sum_{i \in I} \alpha_i m_j^i \right| = \begin{cases} 0 & \text{si } j \in V, \\ |\det M_V^{I \cup \{j\}}| & \text{si } j \notin V. \end{cases}$$

Posons

$$A_1 = \{i/i \in I \text{ et } \alpha_i = 1\} \quad \text{et} \quad A_2 = \{i/i \in I \text{ et } \alpha_i = -1\}.$$

On a

$$\sum_{i \in A_1} m_j^i - \sum_{i \in A_2} m_j^i = 0, +1 \text{ ou } -1 \quad \text{quel que soit } j \in J.$$

4° Montrons que (6) $\Rightarrow$ (1). Pour cela, nous allons montrer que si une matrice carrée $M = (m_j^i)$ ($i \in I; j \in J$) de rang supérieur à 1 a son déterminant impair, et si toute sous-matrice carrée de M différente de M a son déterminant égal à 0, $+1$ ou -1 , alors on a $|\det M| = 1$.

Remarquons d'abord que l'application φ de $\mathcal{X}(I)$ dans $\mathcal{X}(J)$ est biunivoque : en effet, s'il existait un ensemble $A \neq \emptyset$ tel que $\varphi(A) = \emptyset$, on aurait

$$\det M \equiv 0 \pmod{2}.$$

Il est donc possible de trouver un ensemble $A \subset I$, différent de $\emptyset$ et de I , tel que $\varphi(A)$ soit de la forme

$$\varphi(A) = \{j_0\}, \quad \text{avec } j_0 \in J.$$

La sous-matrice M_j^A étant totalement unimodulaire, elle vérifie la proposition (2). Il est donc possible de partitionner A en deux ensembles A_1 et A_2 de façon telle que

$$\sum_{i \in A_1} m_j^i - \sum_{i \in A_2} m_j^i = 0, +1 \text{ ou } -1 \quad \text{quel que soit } j \in J;$$

on a alors nécessairement

$$\sum_{i \in A_1} m_j^i - \sum_{i \in A_2} m_j^i = 0 \quad \text{pour } j \neq j_0.$$

Soit i_0 un élément quelconque de A : on a

$$|\det M| = \left| \sum_{i \in A_1} m_{j_0}^i - \sum_{i \in A_2} m_{j_0}^i \right| \cdot |\det M_j^A - \{i_0\}| = 1.$$

C.Q.F.D.

Ce théorème a de nombreuses conséquences. Tout d'abord, il permet d'établir immédiatement l'équivalence entre les notions de matrice totalement unimodulaire et de sous-groupe régulier.

COROLLAIRE 1 (Tutte). — *Étant donné un ensemble fini I , un ensemble $V \subset I$, et pour chaque $i \in V$, un élément simple $a^{i,V} \in Z^1$ vérifiant*

$$V \cap S(a^{i,V}) = \{i\} \quad \text{et} \quad a_i^{i,V} = 1,$$

considérons la matrice $M = (m_j^i)$ ($i \in V$; $j \in I - V$) définie par

$$m_j^i = a_j^{i,V}.$$

Pour que le sous-groupe F de Z^1 engendré par les éléments $(a^{i,V})_{i \in V}$ soit un sous-groupe régulier (admettant V comme arbre), il faut et il suffit que M soit totalement unimodulaire.

Si F est régulier, considérons un ensemble non vide $A \subset V$, et posons

$$a = \sum_{i \in A} a^{i,V}.$$

D'après la proposition 3, il existe un élément simple $b \in F$ tel que $S(b) = \hat{S}(a)$: on a alors $S(b) \cap V = A$. Posons

$$A_1 = \{i/i \in A \text{ et } b_i = 1\} \quad \text{et} \quad A_2 = \{i/i \in A \text{ et } b_i = -1\};$$

on a

$$\sum_{i \in A_1} m_j^i - \sum_{i \in A_2} m_j^i = b_j = 0, +1 \text{ ou } -1 \quad \text{quel que soit } j \in I - V.$$

La proposition (2) du théorème précédent est donc vérifiée.

Inversement, si M est totalement unimodulaire, soit un élément de F

$$a = \sum_{i \in V} a_i a^{i,V}.$$

Soit 2^k La plus grande puissance de 2 divisant toutes les coordonnées de a , et soit A l'ensemble des éléments $i \in V$ tels que 2^{k+1} ne divise pas a_i . On peut partitionner A en deux ensembles A_1 et A_2 de manière telle que

$$b = \sum_{i \in A_1} a^{i,V} - \sum_{i \in A_2} a^{i,V}$$

soit un élément simple de F . On a alors

$$a_j = 0 \Rightarrow \sum_{i \in A} a_j^{i,V} \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow b_j = 0.$$

On voit ainsi que F est régulier.

Il faut remarquer que le corollaire 1 n'utilise que la partie du théorème fondamental qui concerne l'équivalence des propositions (1) et (2). L'équivalence de ces deux propositions avec les propositions (3), (4), (5) et (6) fournit une caractérisation entièrement nouvelle des matrices totalement unimodulaires. Un certain nombre de conditions suffisantes connues en sont des conséquences directes ([3], [16], [17], [19]).

DÉFINITION. — Soit F un sous-groupe de Z^I . On dit qu'un ensemble $V \subset I$ est un *préarbre* de F si l'application $(a_i)_{i \in I} \rightarrow (a_i)_{i \in V}$ de F dans Z^V est un isomorphisme, et si, pour tout $i \in V$, l'élément $a^{i,V} \in F$ défini par

$$S(a^{i,V}) \cap V = \{i\} \quad \text{et} \quad a_i^{i,V} = 1$$

est simple.

COROLLAIRE 2. — *Pour qu'un sous-groupe $F \subset Z^I$ soit régulier, il faut et il suffit que F admette un préarbre, et que pour tout élément $a \in F$, il existe un élément non nul $b \in F$ tel que*

$$S(b) \subset \dot{S}(a).$$

Il est évident (cf. prop. 3) que tout sous-groupe régulier vérifie les deux conditions proposées. Inversement, supposons que ces conditions sont vérifiées, et considérons la matrice M de terme général

$$m_j = a_j^{i,V} \quad (i \in V, j \in I - V).$$

Soit un ensemble non vide $A \subset V$. Posons

$$a = \sum_{i \in A} a^{i,V},$$

et soit $b \in F$ tel que $b \neq 0$ et $S(b) \subset \dot{S}(a)$.

On a

$$S(b) \cap V \subset \Lambda$$

et

$$b = \sum_{i \in \Lambda} b_i a^{i, V}.$$

D'autre part, on a

$$j \in \Delta \Lambda \Rightarrow a_j \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow b_j = 0.$$

On voit ainsi que la sous-matrice $M_{\Delta \Lambda}^{\Lambda}$ est de rang inférieur à $|\Lambda|$. Il en résulte que M est totalement unimodulaire, et que F est régulier.

Remarque. — Dans l'énoncé précédent, la condition que F admette un préarbre est indispensable. Considérons, par exemple, dans Z^4 le sous-groupe F engendré par les vecteurs-lignes de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Quel que soit $a \in F$, il existe $b \in F$ vérifiant

$$S(b) = \dot{S}(b) = \dot{S}(a);$$

et cependant, F n'est pas régulier.

4. ÉLÉMENTS POSITIFS D'UN SOUS-GROUPE RÉGULIER.

PROPOSITION 1. — *Si F est un sous-groupe régulier de Z^1 , alors pour tout élément $a \in F$, il existe un élément primitif de F à support inclus dans celui de a , ayant toutes ses coordonnées de même signe que celles de a .*

En effet, soit b un élément primitif tel que $S(b) \subset S(a)$: il existe un entier n , positif ou négatif, tel que $a' = a - nb$ a ses coordonnées de même signe que celles de a , et son support strictement inclus dans celui de a . Si $a' = 0$, l'un des éléments b et $-b$ répond à la question. Si $a' \neq 0$, on recommence l'opération avec a' , etc.

DÉFINITION. — Un élément $a \in Z^1$ est dit *positif* s'il est non nul et si toutes ses coordonnées non nulles sont positives.

COROLLAIRE. — *Si F est un sous-groupe régulier de Z^1 , tout élément positif $a \in F$ est combinaison linéaire positive d'éléments primitifs positifs de F à supports inclus dans celui de a .*

PROPOSITION 2. — *Soit F un sous-groupe régulier de Z^1 , soient I_0, I_1 et I_2 trois ensembles formant une partition de I , et soit $i_0 \in I_0$. Une et une seule des deux éventualités suivantes se réalise :*

(1) *Il existe un élément primitif $a \in F$ tel que*

$$a_{i_0} = 1, \quad S(a) \subset I_0 \cup I_1 \quad \text{et} \quad a_i \geq 0 \quad \text{pour } i \in I_0;$$

(2) Il existe un élément primitif $b \in F^*$ tel que

$$b_{i_0} = 1, \quad S(b) \subset I_0 \cup I_2 \quad \text{et} \quad b_i \geq 0 \quad \text{pour} \quad i \in I_0.$$

Dire que (1) ne se réalise pas équivaut à dire, d'après la proposition 1, qu'il n'existe pas d'élément $a \in F$ vérifiant le système de conditions

$$(S) \quad a_i \in \begin{cases} \{1\} & \text{pour } i = i_0, \\ [0, +\infty[& \text{pour } i \in I - \{i_0\}, \\]-\infty, +\infty[& \text{pour } i \in I_1, \\ \{0\} & \text{pour } i \in I_2, \end{cases}$$

D'après la proposition 1 du paragraphe précédent, cela équivaut à dire qu'il existe un élément primitif b de F^* tel que

$$a \text{ vérifie (S)} \Rightarrow \langle b, a \rangle \neq 0.$$

Or pour qu'un tel élément existe, il faut et il suffit que l'éventualité (2) se réalise.

COROLLAIRE. — Si F est un sous-groupe régulier de $\mathbf{Z}^I$, les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(1) F^* n'admet pas d'éléments positifs;

(2) Quel que soit $i \in I$, il existe un élément primitif positif de F dont le support contient i .

En effet, prenons $I_0 = I$, $I_1 = I_2 = \emptyset$. La proposition (1) équivaut à dire que, quel que soit $i_0 \in I_0$, l'éventualité (2) de la proposition précédente ne se réalise pas, et la proposition (2) équivaut à dire que, quel que soit $i_0 \in I_0$, l'éventualité (1) de la proposition précédente se réalise. On a donc bien (1) $\Leftrightarrow$ (2).

THÉORÈME. — Soit F un sous-groupe régulier de $\mathbf{Z}^I$, de dimension r . Si F^* n'admet pas d'éléments positifs, alors il existe r éléments primitifs positifs de F qui engendrent F .

Considérons dans I la relation binaire « $i' = i''$ ou il existe un élément primitif $c \in F^*$ tel que

$$c_{i'} = -1, \quad c_{i''} = 1 \quad \text{et} \quad c_i \geq 0 \quad \text{pour } i \neq i' \text{ »}.$$

Nous allons voir que c'est une relation de préordre. En effet, soient i_1, i_2, i_3 trois éléments distincts de I , et supposons qu'il existe deux éléments primitifs c, c' de F^* tels que

$$\begin{aligned} c_{i_1} &= -1, & c_{i_2} &= 1 & \text{et} & c_i &\geq 0 & \text{pour } i \neq i_1, \\ c'_{i_2} &= -1, & c'_{i_3} &= 1 & \text{et} & c'_i &\geq 0 & \text{pour } i \neq i_2; \end{aligned}$$

posons $c'' = c + c'$. On a

$$c''_{i_1} \leq 0, \quad c''_{i_2} \geq 1 \quad \text{et} \quad c''_i \geq 0 \quad \text{pour } i \neq i_1.$$

D'après la proposition 1, il existe alors un élément primitif $d \in F^*$ vérifiant

$$d_{i_3} = 1, \quad d_{i_1} \leq 0 \quad \text{et} \quad d_i \geq 0 \quad \text{pour } i \neq i_1.$$

Comme F^* n'admet pas d'éléments positifs, on a $d_{i_1} = -1$. Nous venons ainsi de montrer que la relation considérée est transitive; dorénavant, cette relation sera notée $\preceq$. Nous allons maintenant raisonner par récurrence sur $|I|$, en distinguant deux cas.

Premier cas. — La relation considérée est une relation d'ordre. Soit alors i_0 un élément maximal, et posons $J = I - \{i_0\}$. Soit F_J' le sous-groupe de $\mathbf{Z}^I$ constitué par les restrictions à J des éléments de F_J , c'est-à-dire des éléments de F à support inclus dans J ; $F_J'^*$ est le sous-groupe de $\mathbf{Z}^J$ constitué par les restrictions à J des éléments de F^* ; nous allons voir que $F_J'^*$ n'admet pas d'éléments positifs. En effet, supposons le contraire : il existe alors un élément primitif $c \in F^*$ tel que $S(c) \cap J \neq \emptyset$ et tel que

$$c_i \geq 0 \quad \text{pour } i \in J.$$

Comme F^* n'admet pas d'éléments positifs, on a $c_{i_0} = -1$; soit alors $i_1 \in S(c) \cap J$: on a $i_0 \preceq i_1$, ce qui est absurde.

D'après le corollaire précédent, il existe un élément primitif positif $a^1 \in F$ tel que $i_0 \in S(a^1)$; et d'après l'hypothèse de récurrence, il existe, puisque $F_J'^*$ n'admet pas d'éléments positifs, $r - 1$ éléments primitifs positifs $a^2, a^3, \dots, a^r$ de F_J qui engendrent F_J : il est évident alors que $a^1, a^2, \dots, a^r$ engendrent F .

Deuxième cas. — Il existe deux éléments distincts $i_1, i_2 \in I$ vérifiant $i_1 \preceq i_2$ et $i_2 \preceq i_1$. Soient alors $c, c' \in F^*$ vérifiant

$$\begin{aligned} c_{i_1} &= -1, & c_{i_2} &= +1, & c_i &\geq 0 & \text{pour } i \neq i_1, \\ c'_{i_1} &= +1, & c'_{i_2} &= -1, & c'_i &\geq 0 & \text{pour } i \neq i_2. \end{aligned}$$

On a nécessairement

$$c_i = c'_i = 0 \quad \text{pour } i \neq i_1, i_2.$$

On a donc

$$a \in F \Rightarrow a_{i_1} = a_{i_2}.$$

En considérant le sous-groupe régulier constitué par les traces sur $I - \{i_2\}$ des éléments de F , on voit immédiatement, d'après l'hypothèse de récurrence, qu'il existe r éléments primitifs positifs $a^1, a^2, \dots, a^r \in F$ qui engendrent F .

CHAPITRE III.

CYCLES ET COCYCLES.

1. MULTIGRAPHES NON ORIENTÉS. — Un *multigraphe non orienté* G est défini par la donnée :

- d'un ensemble X_G dont les éléments sont appelés les *sommets* de G ;
- d'un ensemble U_G dont les éléments sont appelés les *arêtes* de G ;
- d'une application qui, à toute arête $u \in U_G$, fait correspondre une paire non ordonnée $\{a, b\}$ de sommets, distincts ou non : a et b s'appellent les *extrémités* de l'arête u .

Le multigraphe G est dit *fini* si X_G et U_G le sont. Dans cette thèse, il s'agira toujours de multigraphes finis. Un multigraphe fini peut se dessiner sur le papier en représentant chaque sommet par un point, et chaque arête par un trait continu reliant ses deux extrémités. Une arête dont les deux extrémités sont égales s'appellera une *boucle* et se représentera effectivement sur le papier par une boucle.

Une paire non ordonnée $\{a, b\}$ de sommets pour laquelle il existe au moins un élément $u \in U_G$ d'extrémités a et b s'appellera quelquefois, par abus de langage, une arête de G . On dira que $\{a, b\}$ est une arête *simple* s'il n'y a qu'une arête de G d'extrémités a et b , une arête *multiple* s'il y a plus d'une arête de G d'extrémités a et b . Un multigraphe non orienté dont toutes les arêtes sont simples s'appellera un *graphe* non orienté. Si G est un graphe, U_G peut être considéré comme un ensemble de paires non ordonnées de sommets.

Étant donné un multigraphe G , et un ensemble $A \subset X_G$, on appellera *sous-multigraphe engendré par A* ou encore *sous-multigraphe obtenu par suppression des sommets de $X_G - A$* le multigraphe G_A qui a pour sommets les éléments de A , et pour arêtes les éléments de U_G qui ont leurs deux extrémités dans A , ces arêtes ayant dans G_A les mêmes extrémités que dans G . Étant donné un ensemble $L \subset U_G$, on appellera *multigraphe partiel défini par L* , ou encore *multigraphe partiel obtenu par suppression des arêtes de $U_G - L$* , le multigraphe $G(L)$ qui a pour sommets les éléments de X_G , pour arêtes les éléments de L , ces arêtes ayant dans $G(L)$ les mêmes extrémités que dans G .

On définit dans G une *chaîne élémentaire* lorsqu'on se donne une séquence $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$ de sommets distincts et une séquence $u_1, u_2, \dots, u_k$ d'arêtes distinctes telles que u_i a pour extrémités x_{i-1} et x_i ($i = 1, 2, \dots, k$). Une chaîne élémentaire est entièrement déterminée par l'ensemble des arêtes par lesquelles elle passe. Si G est un graphe, une chaîne élémentaire

de G est entièrement déterminée par la séquence des sommets par lesquels elle passe : on la note généralement $[x_0, x_1, x_2, \dots, x_k]$.

Étant donné un multigraphe G , considérons dans X_G la relation binaire « $a = b$ ou il existe une chaîne élémentaire passant par a et b ». C'est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence s'appellent les *composantes connexes* de G . On dit que G est *connexe* s'il n'a qu'une composante connexe. On dit qu'un sommet $a \in X_G$ est *isolé* s'il constitue à lui seul une composante connexe.

Considérons maintenant l'application ω_G de $\mathcal{T}(X_G)$ dans $\mathcal{T}(U_G)$ définie par

$$\omega_G(A) = \text{ensemble des arêtes qui ont une extrémité dans } A, \text{ et l'autre dans } X_G - A.$$

Cette application est linéaire, car on a [en convenant de poser $\omega_G(a) = \omega_G(\{a\})$]

$$\omega_G(A) = \sum_{a \in A} \omega_G(a);$$

le noyau de cette application est constitué par les réunions de composantes connexes. Un ensemble d'arêtes de la forme $\omega_G(A)$ s'appelle un *cocycle*. L'ensemble des cocycles, que nous noterons Ω_G , est un sous-groupe de $\mathcal{T}(U_G)$ de dimension $n - p$, en appelant n le nombre de sommets et p le nombre de composantes connexes de G . On appelle *cocycles élémentaires* les éléments minimaux de Ω_G .

PROPOSITION 1 ⁽⁴⁾. — *Pour qu'un cocycle soit élémentaire, il faut et il suffit qu'il soit de la forme $\omega_G(A)$, où G_A est connexe, et où G_{G-A} est connexe, en appelant C la composante connexe qui contient A .*

En effet, soit $\omega_G(A)$ un cocycle de la forme indiquée, et soit $L \subset \omega_G(A)$ avec $L \neq \omega_G(A)$; toutes les composantes connexes de G sont des composantes connexes du multigraphe partiel obtenu par suppression de L : il en résulte que si L est un cocycle, il ne peut être que vide. Inversement, soit $\omega_G(B)$ un cocycle élémentaire : $\omega_G(B)$ est égal à la réunion des cocycles disjoints $\omega_G(B \cap C_1), \omega_G(B \cap C_2), \dots, \omega_G(B \cap C_p)$, en appelant $C_1, C_2, \dots, C_p$ les composantes connexes de G ; il est donc nécessairement égal à l'un de ces cocycles : on peut ainsi le mettre sous la forme $\omega_G(A)$, où A est contenu dans une composante connexe C . Ceci dit, supposons que G_A (ou que G_{G-A}) ne soit pas connexe, et soient $A_1, A_2, \dots, A_r$ les composantes connexes de G_A (ou de G_{G-A}) : $\omega_G(A)$ est égal à la réunion des cocycles $\omega_G(A_1), \dots, \omega_G(A_r)$, et ces cocycles ne sont pas vides, puisque G_G est connexe; nous aboutissons là à une contradiction. La proposition est donc démontrée.

Nous dirons qu'un ensemble d'arêtes est un *cycle élémentaire* s'il est possible de l'ordonner en une séquence $u_1, u_2, \dots, u_k$ et de trouver une

⁽⁴⁾ Cf. [2].

séquence $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ de sommets distincts de façon telle que $u_1, u_2, \dots, u_k$ aient respectivement pour extrémités $\{x_0, x_1\}, \{x_1, x_2\}, \dots, \{x_{k-1}, x_0\}$. Dans un graphe, un cycle élémentaire est entièrement déterminé par la séquence des sommets par lesquels il passe.

Nous appellerons *cycle* tout ensemble d'arêtes orthogonal à tous les cocycles : autrement dit, un ensemble $L \subset U_G$ sera un cycle si, pour tout sommet a , le nombre d'arêtes de L qui ne sont pas des boucles, et qui ont a pour extrémité, est pair. Nous noterons M_G l'ensemble des cycles. Il est évident que M_G est un sous-groupe de $\mathcal{X}(U_G)$ de dimension $m - n + p$, où m , n et p sont respectivement le nombre d'arêtes, de sommets, de composantes connexes de G . D'autre part, les éléments minimaux de M_G sont les cycles élémentaires de G .

Étant donné un multigraphe G , on dit qu'un ensemble $V \subset U_G$ est un *arbre* de G , si c'est un arbre pour $\Omega_G^{(5)}$; on dit que $W \subset U_G$ est un *coarbre* de G si c'est un arbre de M_G . Il est évident que les coarbres sont les complémentaires des arbres; d'autre part, on a immédiatement :

PROPOSITION 2. — *Étant donné un multigraphe G ayant n sommets et p composantes connexes, et un ensemble $V \subset U_G$, les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (1) V est un arbre de G ;
- (2) $G(V)$ est sans cycles et a p composantes connexes;
- (3) $G(V)$ est sans cycles et $|V| = n - p$;
- (4) $G(V)$ a p composantes connexes, et $|V| = n - p$;
- (5) $G(V)$ est sans cycles, et en ajoutant une arête quelconque, on obtient un cycle;
- (6) Le nombre de composantes connexes de $G(V)$ est p , et il augmente (d'une unité) si l'on supprime une arête quelconque.

(Évident.)

On dit qu'un multigraphe G est un *arbre* s'il est connexe et si U_G est un arbre de G .

2. ISOMORPHISMES. ÉTRÉCISSEMENT ET SUPPRESSIONS. PIVOTEMENTS. — Étant donné un ensemble fini I , nous appellerons *groupe de parties* de I tout sous-groupe de $\mathcal{X}(I)$. Soit F un groupe de parties de I , et soit F' un groupe de parties de I' : nous dirons que F et F' sont *isomorphes* s'il existe une bijection $\varphi : I \rightarrow I'$ telle que

$$A \in F \iff \varphi(A) \in F'.$$

(5) Nous nous écartons ici légèrement de la terminologie habituelle, dans laquelle l'être que nous venons de définir s'appelle un arbre si G est connexe, une « forêt » si G n'est pas connexe.

Nous dirons qu'un multigraphe G est *cocycliquement* (resp. *cycliquement*) *isomorphe* à un groupe F de parties de I si le groupe Ω_G (resp. M_G) de parties de U_G est isomorphe à F . Nous dirons que deux multigraphes G et G' sont *cocycliquement isomorphes* si Ω_G et $\Omega_{G'}$ sont isomorphes.

Étant donné un groupe F de parties de I , et deux ensembles disjoints $K, L \subset I$, nous noterons $[F, K, L]$ le groupe de parties de $I - K - L$ constitué par les traces sur $I - K - L$ des éléments de F inclus dans $I - K$.

PROPOSITION 1. — On a

$$[F, K, L]^* = [F^*, L, K].$$

(Évident.)

PROPOSITION 2. — Si L, L', K, K' sont des ensembles disjoints deux à deux et inclus dans I , on a

$$[[F, K, L], K', L'] = [F, K \cup K', L \cup L'].$$

(Évident.)

Quelquefois, il sera commode de noter F_K le groupe de parties $[F, I - K, \emptyset]$. Nous dirons qu'un groupe F de parties de I est *décomposable* s'il existe deux ensembles non vides disjoints I' et I'' , avec $I' \cup I'' = I$ tels que tout élément de F est la réunion d'un élément de $F_{I'}$ et d'un élément de $F_{I''}$, ou, ce qui revient au même, tels que tout élément minimal de F est contenu, soit dans I' , soit dans I'' . Étant donné un groupe F de parties de I , introduisons dans I la relation binaire « $i = i'$ » ou il existe un élément minimal de F contenant i et i' ». C'est une relation d'équivalence. En effet, soient $i, i' \in I$, et soient A et B deux éléments minimaux de F tels que $i \in A$, $i' \in B$, $A \cap B \neq \emptyset$ et tel que $A \cup B$ est minimal avec ces propriétés. Supposons $A \neq B$, et soit C un élément minimal de F vérifiant $i' \in C \subset A \dot{+} B$: C rencontre nécessairement A ; si $i \notin C$, alors on a

$$A \dot{+} B \dot{+} C \not\subset A, \quad \text{d'où} \quad |A \cup C| < |A \cup B|,$$

ce qui est absurde puisqu'on a aussi

$$i \in A, \quad i' \in C \quad \text{et} \quad A \cap C \neq \emptyset.$$

Soient $I_1, I_2, \dots, I_r$ les classes d'équivalence: nous dirons que $I_1, I_2, \dots, I_r$ sont les *ensembles de décomposition* de F .

PROPOSITION 3. — Soit un groupe de parties F , et soient $I_1, I_2, \dots, I_r$ les ensembles de décomposition de F . Les groupes de parties $F_{I_1}, F_{I_2}, \dots, F_{I_r}$ sont indécomposables. De plus, $(I_1, I_2, \dots, I_r)$ est la plus fine des partitions $(J_1, J_2, \dots, J_s)$ de I telles que tout élément de F est réunion d'éléments de $F_{J_1}, F_{J_2}, \dots, F_{J_s}$. D'autre part, F^* a les mêmes ensembles de décomposition que F . On a

$$[F, \emptyset, I - I_k] = F_{I_k} \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \dots, r.$$

Enfin, pour que F soit indécomposable, il faut et il suffit que, quels que soient $i, i' \in I$, il existe un élément minimal de F contenant i et i' .

(Évident.)

Considérons maintenant deux multigraphes G et G' . Nous appellerons *isomorphisme* de G sur G' tout couple (σ, φ) , où σ est une bijection $X_G \rightarrow X_{G'}$, où φ est une bijection $U_G \rightarrow U_{G'}$, et où, pour tout $u \in U_G$, $\varphi(u)$ a pour extrémités dans G' les images par σ des extrémités de u . Ceci dit, nous considérons G et G' comme *égaux* si $U_G = U_{G'}$, et s'il existe un isomorphisme (σ, e) , où e est l'application identique de U_G dans lui-même.

Étant donné un multigraphe G , et deux ensembles disjoints $K, L \subset U_G$, nous appellerons *multigraphe obtenu par étrécissement de K et suppression de L* , et nous noterons $[G, K, L]$ le multigraphe qui a pour arêtes les éléments de $U_G - K - L$, pour sommets les composantes connexes de $G(K)$, et dans lequel toute arête $u \in U_G - K - L$ a pour extrémités les composantes qui contiennent les extrémités de u dans G . On a, par définition,

$$G(L) = [G, \emptyset, U_G - L].$$

PROPOSITION 4. — *Le groupe des cocycles de $[G, K, L]$ est $[\Omega_G, K, L]$. Son groupe des cycles est $[M_G, L, K]$.*

(Évident.)

Étant donné un multigraphe connexe G , on dit qu'un sommet $a \in X_G$ est un *point d'articulation* si $G_{X_G - \{a\}}$ n'est pas connexe; plus généralement, on dit qu'un ensemble $A \subset X_G$ est un *ensemble d'articulation* si $G_{X_G - A}$ n'est pas connexe. Un multigraphe est dit *inarticulé* s'il est connexe et sans points d'articulation. Un multigraphe sera dit *3-connexe* s'il est connexe et s'il ne possède pas d'ensemble d'articulation de moins de trois éléments ⁽⁶⁾. Nous dirons qu'un multigraphe G est *indécomposable* s'il n'a pas de sommets isolés et si le groupe Ω_G est indécomposable.

PROPOSITION 5 ⁽⁷⁾. — *Étant donné un multigraphe G , sans sommets isolés, ayant plus d'une arête, les quatre propositions suivantes sont équivalentes :*

- (1) G est inarticulé et sans boucles;
- (2) G est indécomposable;
- (3) Quels que soient $u, v \in U_G$, il existe un cycle élémentaire contenant u et v ;
- (4) Quels que soient $u, v \in U_G$, il existe un cocycle élémentaire contenant u et v .

⁽⁶⁾ Nous nous écartons ici, très légèrement, de la définition classique : on dit qu'un multigraphe est h -connexe s'il est connexe, s'il ne possède pas d'ensemble d'articulation de moins de h éléments, et si $h \leq |X_G| - 1$.

⁽⁷⁾ Une partie des propositions 5 et 6 a été établi par H. Whitney ([34], [35]).

On a évidemment $(2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4)$ et $(3) \Rightarrow (1)$. Le fait que $(1) \Rightarrow (4)$ découle de la proposition suivante :

PROPOSITION 6. — Soit un multigraphe G , connexe et sans boucles, et soient $L_1, L_2, \dots, L_r$ les ensembles de décomposition de Ω_G . Appelons $A_i (i = 1, 2, \dots, r)$ l'ensemble des extrémités des arêtes de L_i . On a les propriétés suivantes :

1° Toute intersection $A_i \cap A_j (i \neq j)$ contient au plus un élément;

2° Tout sous-multigraphe G_{A_i} est indécomposable. De plus, $[G, U_G - L_i, \emptyset]$ et le multigraphe obtenu en supprimant dans $G(L_i)$ les sommets isolés sont tous deux égaux à G_{A_i} ;

3° Pour qu'un sommet de G soit un point d'articulation, il faut et il suffit qu'il appartienne à au moins deux des ensembles $A_1, A_2, \dots, A_r$;

4° Le graphe qui a pour sommets les ensembles $A_1, A_2, \dots, A_r$, et pour arêtes les paires $\{A_i, A_j\}$ telles que $i \neq j$ et $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ est un arbre.

Le multigraphe obtenu en supprimant dans $G(L_i)$ les sommets isolés est inarticulé, puisque $[\Omega_G, \emptyset, U_G - L_i]$ est indécomposable, et son ensemble de sommets est A_i . Comme il n'existe pas de cycle élémentaire de G qui rencontre deux ensembles L_i et L_j distincts, on voit immédiatement que ce multigraphe est égal à G_{A_i} , que les points 1° et 4° sont vrais; et que chacune des composantes connexes de $G(U_G - L_i)$ contient un élément de A_i et un seul, donc que $[G, U_G - L_i, \emptyset]$ est égal à G_{A_i} . Si un sommet x appartient à deux ensembles distincts A_i et A_j , $\omega_G(x)$ rencontre à la fois L_i et L_j , donc ne peut être un élément minimal de Ω : x est un point d'articulation. Au contraire, si x n'appartient qu'à un ensemble A_i , on a $\omega_G(x) \subset L_i$, et, puisque G_{A_i} est inarticulé, $\omega_G(x)$ est un élément minimal de $\Omega_{G_{A_i}}$, et a fortiori de Ω_G : x n'est pas un point d'articulation.

Les sous-multigraphes $G_{A_1}, G_{A_2}, \dots, G_{A_r}$ s'appelleront les *pièces* de G .

Notations. — Soit F un groupe de parties indécomposable; nous noterons $\hat{F}$ l'ensemble des éléments minimaux de F , et $\hat{\hat{F}}$ l'ensemble des éléments $K \in \hat{F}$ tels que $[F, \emptyset, K]$ est indécomposable.

PROPOSITION 7 ⁽⁸⁾. — Soient G et G' deux multigraphes indécomposables cocycliquement isomorphes. Si G est 3-connexe, il existe un isomorphisme entre G et G' compatible avec l'isomorphisme cocyclique.

Il s'agit de montrer qu'étant donné l'isomorphisme cocyclique $\varphi : U_G \rightarrow U_{G'}$, il existe un isomorphisme de G sur G' qui est de la forme (σ, φ) . Tout d'abord, Ω_G et $\Omega_{G'}$ ayant même dimension, G et G' ont même nombre

⁽⁸⁾ Cette proposition a été établie, dans un langage différent, par H. Whitney [34].

de sommets. Nous supposons que ce nombre de sommets est supérieur à deux (s'il est égal à deux, la propriété est évidente). Soit $a \in X_G$: on a $\omega_G(a) \in \hat{\Omega}_G$, puisque G est 3-connexe; l'image par φ de $\omega_G(a)$ est donc nécessairement de la forme $\omega_{G'}(a')$, avec $a' \in X_{G'}$; et a' est défini de manière unique, puisque $|X_{G'}| > 2$. Si l'on pose $a' = \sigma(a)$, on voit immédiatement que (σ, φ) est un isomorphisme de G sur G' .

Remarque. — Une autre manière d'exprimer la proposition précédente est de dire que si deux multigraphes indécomposables G et G' vérifient $U_G = U_{G'}$ et $\Omega_G = \Omega_{G'}$, et si G est 3-connexe, alors on a $G = G'$.

Soit un multigraphe indécomposable G possédant un ensemble d'articulation à deux éléments $\{a, b\}$, et soit A une composante connexe de $G_{X_G - \{a, b\}}$. Considérons le multigraphe G' obtenu à partir de G en déplaçant chaque arête qui a pour extrémités dans G , $x \in A$ et a , de façon à ce qu'elle ait x et b pour extrémités dans G' , et chaque arête qui a pour extrémités $x \in A$ et b dans G , de façon à ce qu'elle ait x et a pour extrémités dans G' (cf. fig. 1). Nous dirons que G' est obtenu à partir de G par *pivotement sur a, b* . On a évidemment $U_G = U_{G'}$, $\Omega_G = \Omega_{G'}$, et $G \neq G'$.



Fig. 1.

PROPOSITION 8. — Pour qu'un multigraphe G , sans sommets isolés et ayant plus d'une arête, soit 3-connexe et sans boucles, il faut et il suffit que tout multigraphe G' vérifiant $U_{G'} = U_G$ et $\Omega_{G'} = \Omega_G$ soit égal à G aux sommets isolés près.

(Évident.)

PROPOSITION 9. — Soit un groupe de parties indécomposable $F \subset \mathcal{P}(I)$. Soit T un élément de $\hat{F}$, et soient $I_1, I_2, \dots, I_r$ les ensembles de décomposition de $[F, \emptyset, T]$. Si, quel que soit k , il existe un multigraphe 3-connexe G_k vérifiant

$$U_{G_k} = T \cup I_k \quad \text{et} \quad \Omega_{G_k} = [F, I - U_{G_k}, \emptyset],$$

et si, quels que soient k et l , il existe un multigraphe connexe G_{kl} et un sommet $\alpha_{kl} \in X_{G_{kl}}$ vérifiant

$$U_{G_{kl}} = T \cup I_k \cup I_l, \quad \Omega_{G_{kl}} = [F, I - U_{G_{kl}}, \emptyset] \quad \text{et} \quad \omega_{G_{kl}}(\alpha_{kl}) = T,$$

alors il existe un multigraphe connexe G et un sommet $\alpha \in X_G$ vérifiant

$$U_G = I, \quad \Omega_G = F \quad \text{et} \quad \omega_G(\alpha) = T.$$

Remarquons tout d'abord que F est égal au groupe engendré par les éléments des r groupes $[F, I - T - I_k, \emptyset]$ ($k = 1, 2, \dots, r$). D'autre part, si J est une réunion non vide d'ensembles choisis parmi $I_1, I_2, \dots, I_r$, le groupe $[F, I - T - J, \emptyset]$ est indécomposable. En effet, s'il ne l'était pas, il aurait au moins un ensemble de décomposition, soit K ne rencontrant pas T ; car T , qui appartient à $\hat{F}$, est nécessairement contenu dans l'un des ensembles de décomposition; et F serait égal au groupe engendré par les éléments de F_K et de F_{I-K} , ce qui est impossible, F étant indécomposable.

La proposition est vraie pour $r = 2$. Nous allons supposer $r > 2$, et raisonner par récurrence sur r . On peut remarquer que G_k étant 3-connexe et sans boucles, on a $[G_{kl}, I_l, \emptyset] = G_k$. Lorsqu'on étrecit dans G_{kl} les arêtes de I_l , tous les sommets de la pièce du sous-multigraphe obtenu à partir de G_{kl} par suppression de α_{kl} qui a I_l pour ensemble d'arêtes se ramènent à un seul sommet, qu'on peut identifier à un sommet a_{kl} de G_k ; d'autre part, α_{kl} s'identifie à un sommet α_k de G_k , et l'on a $\omega_{G_k}(\alpha_k) = T$. Deux cas se présentent alors :

Premier cas. — Quel qu'il soit k , tous les sommets a_{kl} ($l = 1, 2, \dots, r; l \neq k$) sont égaux à un même sommet a_k de G_k . Il est possible alors de construire un multigraphe G ayant les propriétés suivantes :

(1) Il existe un sommet $\alpha \in X_G$ tel que $G_{X_G - \{\alpha\}}$ est connexe et possède un seul point d'articulation a , et r pièces égales à $G'_1, G'_2, \dots, G'_r$, où l'on appelle G'_k le sous-multigraphe de G_k obtenu par suppression de α_k , les sommets $a_1, a_2, \dots, a_r$ s'identifiant tous à a ;

(2) On a $\omega_G(\alpha) = T$;

(3) Étant donné une arête $u \in T$, s'il existe un indice k et un sommet x de G_k , différent de α_k et de a_k , qui est une extrémité de u dans G , alors x reste une extrémité de u dans G (cette règle ne conduit pas à des contradictions, étant donné l'existence des multigraphes G_{kl}); sinon, a est une extrémité de u dans G .

On a alors $U_G = I$, $\Omega_G = F$ et $\omega_G(\alpha) = T$.

Deuxième cas. — Il existe un indice k_0 , une partition $(L_1, L_2, \dots, L_s)$, avec $s \geq 2$, des indices $l \neq k_0$, et des sommets distincts $a_1, a_2, \dots, a_s$ de G_{k_0} tels que

$$l \in L_j \iff a_{k_0 l} = a_j.$$

Posons alors

$$J_j = \bigcup_{l \in L_j} I_l \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, s.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe des multigraphes $G^1, G^2, \dots, G^s$ et des sommets respectifs $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^s$ de ces multigraphes, tels que

$$U_{G^j} = T \cup I_{k_0} \cup J_j, \quad \Omega_{G^j} = [F, I - U_{G^j}, \emptyset]$$

et

$$\omega_{G^j}(\alpha^j) = T \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, s.$$

Appelons $G'^1, G'^2, \dots, G'^s$ les multigraphes obtenus à partir de $G^1, G^2, \dots, G^s$ par suppression des sommets respectifs $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^s$. Si G'^j est l'un quelconque d'entre eux, il existe dans G'^j une pièce égale à G'_{k_0} , et a_j est le seul sommet de cette pièce qui soit un point d'articulation de G'^j . Il est alors possible de construire un multigraphe G ayant les propriétés suivantes :

- (1) Il existe un sommet $\alpha \in X_G$ pour lequel on a $\omega_G(\alpha) = T$;
- (2) Le multigraphe G' obtenu par suppression de α , est connexe, G'_{k_0} est une pièce de ce multigraphe, et les seuls sommets de cette pièce qui soient des points d'articulation de G' sont $a_1, a_2, \dots, a_s$;
- (3) Si l'on appelle A_j l'ensemble des sommets x de G' tels que toute chaîne élémentaire partant de x et aboutissant à un sommet de la pièce G'_{k_0} passe par a_j , le sous-multigraphe de G' engendré par A_j et par les sommets de G'_{k_0} est égal à G'^j ;
- (4) Étant donné une arête $u \in T$, s'il existe un sommet x de G_{k_0} , différent de α_{k_0} et de $a_1, a_2, \dots, a_s$, tel que x est une extrémité de u dans G_{k_0} , alors x est une extrémité de u dans G (l'autre étant α); si, au contraire, u a pour extrémité dans G_{k_0} l'un des sommets $a_1, a_2, \dots, a_s$, soit a_j , et si x est dans G' l'extrémité de u autre que α^j , alors x est une extrémité de u dans G (l'autre étant α). On a bien

$$U_G = I, \quad \Omega_G = F \quad \text{et} \quad \omega_G(\alpha) = T.$$

C. Q. F. D.

3. GROUPES COCYCLIQUES. — Soit un groupe de parties indécomposable $F \subset \mathcal{P}(I)$, soit T un élément de $\hat{F}$, et soient $I_1, I_2, \dots, I_r$ les ensembles de décomposition de $[F, \emptyset, T]$. S'il existe des multigraphes $G_1, G_2, \dots, G_r$ vérifiant

$$U_{G_k} = T \cup I_k \quad \text{et} \quad \Omega_{G_k} = [F, I - U_{G_k}, \emptyset] \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, r,$$

nous dirons que F est l'assemblage suivant T des multigraphes $G_1, G_2, \dots, G_r$, et ces multigraphes s'appelleront les *morceaux* de l'assemblage; il est évident que pour chaque morceau G_k , il existe un sommet α_k vérifiant $\omega_{G_k}(\alpha_k) = T$. Nous dirons que deux morceaux G_k et G_l sont *compatibles* s'il existe un multigraphe G_{kl} et un sommet α_{kl} de G_{kl} tels que

$$U_{G_{kl}} = T \cup I_k \cup I_l, \quad \Omega_{G_{kl}} = [F, I - U_{G_{kl}}, \emptyset] \quad \text{et} \quad \omega_{G_{kl}}(\alpha_{kl}) = T;$$

nous appellerons *graphe des incompatibilités* le graphe qui a pour sommets les morceaux, pour arêtes les paires de morceaux incompatibles.

Étant donné un morceau G_k , soit A_k l'ensemble constitué par α_k et les sommets reliés à α_k : A_k s'appellera l'ensemble de base de G_k . Nous appellerons *ensemble correct* tout ensemble $K \subset I - T$ tel que $I_1 - K, I_2 - K, \dots, I_r - K$ sont les ensembles de décomposition de $[F, K, T]$ et tel que, pour chaque morceau G_k , chaque composante connexe de $G_k(K \cap I_k)$ contient un élément de A_k et un seul. Remarquons que si K est un ensemble correct, $[F, K, O]$ est l'assemblage suivant T des multigraphes $[G_k, K \cap I_k, O]$ ($k = 1, 2, \dots, r$).

LEMME 1. — Si G est un graphe inarticulé ayant plus d'une arête et si a est un sommet quelconque de G , il existe au moins deux sommets b et b' , différents de a et reliés à a , tels que $\{a, b\}$ et $\{a, b'\}$ ne sont pas des ensembles d'articulation de G .

En effet, considérons la famille $\mathfrak{A}$ des parties non vides $A \subset X_G$ pour lesquelles il existe une arête $\{a, x\}$ telle que A est une composante connexe, mais pas la seule, du sous-graphe obtenu par suppression des sommets a et x . Si cette famille est vide, la propriété est évidente. Sinon, soient A et A' deux éléments minimaux disjoints de $\mathfrak{A}$, et soient b et b' deux sommets reliés à a appartenant respectivement à A et A' : il est évident que $\{a, b\}$ et $\{a, b'\}$ ne sont pas des ensembles d'articulation.

PROPOSITION 1. — Pour tout assemblage, il existe un ensemble correct.

Soit G_k un morceau de l'assemblage, et supposons qu'il existe un sommet $a \notin A_k$. Soit b un sommet relié à a , différent de a et de α_k , et tel que $\{\alpha_k, a, b\}$ n'est pas un ensemble d'articulation de G_k — un tel sommet existe, en vertu du lemme précédent, car le multigraphe obtenu à partir de G_k par suppression de α_k est indécomposable —; soit K_k^1 l'ensemble des arêtes reliant a et b et soit $G_k^1 = [G_k, K_k^1, O]$. S'il existe dans G_k^1 un sommet n'appartenant pas à l'ensemble de base, on peut renouveler l'opération précédente, car le multigraphe obtenu à partir de G_k^1 par suppression de α_k est indécomposable, etc. Finalement, on obtiendra un multigraphe $G_k^{n_k}$ dont tout sommet appartient à l'ensemble de base. Posons alors

$$K_k = \bigcup_{i=1}^{n_k} K_k^i \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, r \quad \text{et} \quad K = \bigcup_{k=1}^r K_k.$$

L'ensemble K ainsi obtenu est correct.

Nous dirons qu'un groupe de parties $F \subset \mathfrak{A}(I)$ est *cocyclique* s'il existe un multigraphe G vérifiant $U_G = I$ et $\Omega_G = F$; nous dirons alors que G est un multigraphe *associé* à F .

THÉOREME 1. — Soit F un assemblage suivant T des multigraphes $G_1, G_2, \dots, G_r$, et soit K un ensemble correct. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) F est cocyclique;
- (2) $[F, K, \emptyset]$ est cocyclique;
- (3) Le graphe des incompatibilités de l'assemblage F est bichromatique;
- (4) Le graphe des incompatibilités de l'assemblage $[F, K, \emptyset]$ est bichromatique ⁽⁹⁾.

On a évidemment $(1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4)$ et, d'après la proposition 9 du paragraphe précédent, on a aussi $(4) \Rightarrow (2)$; nous allons montrer que $(2) \Rightarrow (1)$. En effet, soit G un multigraphe associé à $[F, K, \emptyset]$: les pièces de $[G, \emptyset, T]$ sont égales aux sous-multigraphes obtenus à partir des multigraphes 3-connexes $[G_k, K \cap I_k, \emptyset]$ ($k = 1, 2, \dots, r$) par suppression des sommets α_k ($k = 1, 2, \dots, r$); et les ensembles des sommets de ces pièces sont les ensembles $A_k - \{\alpha_k\}$ ($k = 1, 2, \dots, r$). Soit alors G' le multigraphe obtenu à partir de G en supprimant les arêtes n'appartenant pas à T , en ajoutant comme sommets les sommets de $G_1, G_2, \dots, G_r$ qui n'appartiennent pas aux ensembles de base, et comme arêtes les éléments de $I - T$, de manière que toute arête $u \in I_k$ ait dans G' les mêmes extrémités que dans G_k : le groupe des cocycles de G' n'est autre que F .

C. Q. F. D.

Étant donné un groupe de parties $F \subset \mathcal{E}(I)$, considérons dans I la relation d'équivalence « $i_1 = i_2$ ou $\{i_1, i_2\} \in F^*$ », et soient $C_1, C_2, \dots, C_r$ les classes d'équivalence : nous dirons que ce sont les *classes d'équivalence de F* , et que F est d'ordre r . On a évidemment la double inégalité

$$\dim F \leq r \leq 2^{\dim F};$$

si F est indécomposable, et si $r > 1$, les deux inégalités sont strictes. Posons $\bar{I} = \{1, 2, \dots, r\}$ et considérons le groupe $\bar{F}$ de parties de $\bar{I}$ défini par

$$V \in \bar{F} \iff \bigcup_{k \in V} C_k \in F;$$

$\bar{F}$ s'appellera le *groupe réduit* de F . Nous dirons que deux groupes de parties F et G ont *même type* si leurs groupes réduits sont isomorphes.

PROPOSITION 2. — Soit un groupe de parties réduit et indécomposable $F_0 \subset \mathcal{E}(I_0)$ vérifiant $|I_0| = 2^{\dim F_0} - 1$, et soit un groupe de parties quelconque $F \subset \mathcal{E}(I)$. S'il existe deux ensembles disjoints $K, L \subset I$ tels que

⁽⁹⁾ Un graphe est dit k -chromatique s'il existe une partition de ses sommets en k ensembles, telle que toute arête a ses extrémités dans deux ensembles différents.

$[F, K, L]$ est isomorphe à F_0 , alors il existe un ensemble $H \subset I$ tel que $[F, H, \emptyset]$ est de même type que F_0 .

Soit $L_1 \subset I$ tel qu'il existe $K_1 \subset I - L_1$, avec $[F, K_1, L_1]$ de même type que F_0 et supposons L_1 minimal avec cette propriété : nous allons voir que $L_1 = \emptyset$. En effet, soit i_0 un élément de L_1 , et posons

$$I_1 = I - K_1 - (L_1 - \{i_0\}), \quad F_1 = [F, K_1, L_1 - \{i_0\}], \\ F_2 = [F_1, \emptyset, \{i_0\}] \quad \text{et} \quad F'_2 = [F_1, \{i_0\}, \emptyset].$$

Si $\{i_0\} \in F_1$, on a $F'_2 = F_2$. Si $\{i_0\} \notin F_1$, on a

$$\dim F_1 = \dim F_2 = \dim F_0,$$

et l'ordre de F_1 est égal, soit à $2^{\dim F_0} - 1$, soit à $2^{\dim F_0}$: dans le premier cas, F_1 est de même type que F_0 ; dans le second cas, i_0 n'appartient à aucun élément de F_1 , ce qui entraîne que F'_2 est égal à F_2 . On voit ainsi que si L_1 n'est pas vide, il ne peut être minimal.

Nous dirons qu'un groupe de parties $F \subset \mathcal{R}(I)$ est *critique* s'il n'est pas cocyclique, et si tout groupe de la forme $[F, K, \emptyset]$ avec $K \neq \emptyset$, est cocyclique. On peut vérifier que les groupes de parties de dimension 1 ou 2 sont cocycliques; mais il existe un groupe de parties non cocyclique de dimension 3 : c'est le groupe Φ de parties de $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ engendré par les éléments $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 5, 6\}$ et $\{1, 3, 5, 7\}$; tout groupe de parties non cocyclique de dimension 3 est de même type que Φ . Il est évident que Φ est critique. Ce groupe va jouer un rôle important dans ce qui suit.

LEMME 2. — Soit un groupe critique réduit $F \subset \mathcal{R}(I)$. F est indécomposable et ne contient aucune partie de I ayant moins de trois éléments. De plus, quel que soit $i_0 \in I$, $[F, \{i_0\}, \emptyset]$ est indécomposable.

La dernière partie de l'énoncé constitue le seul point délicat; nous allons la démontrer. Supposons qu'il existe $i_0 \in I$ et deux ensembles non vides disjoints I_1 et I_2 avec

$$I_1 \cup I_2 = I - \{i_0\}$$

tels que tout élément de $[F, \{i_0\}, \emptyset]$ est la réunion d'un élément de F contenu dans I_1 et d'un élément de F contenu dans I_2 . Soit un élément $i_1 \in I_1$: comme F est réduit, il existe un élément de F contenant i_0 , et ne contenant pas i_1 ; il en résulte qu'on a

$$[F, \emptyset, I_1] = [F, \{i_1\}, I_1 - \{i_1\}],$$

donc que $[F, \emptyset, I_1]$ est cocyclique; de même $[F, \emptyset, I_2]$ est cocyclique. Soient G_1 et G_2 des multigraphes associés respectivement à ces deux groupes, et soit G le multigraphe obtenu en « recollant » G_1 et G_2 suivant l'arête i_0 comme l'indique la figure 2 : on a $\Omega_G = F$, ce qui est absurde.

LEMME 3. — Soit un groupe critique réduit $F \subset \mathcal{E}(I)$. Une (et une seule) des deux éventualités suivantes se réalise :

- (1) F est isomorphe à Φ ;
 (2) Il existe $i_0 \in I$ et $T, T' \in \hat{F}$ tels que
- $$(I - T) \cap T' = \{i_0\}.$$

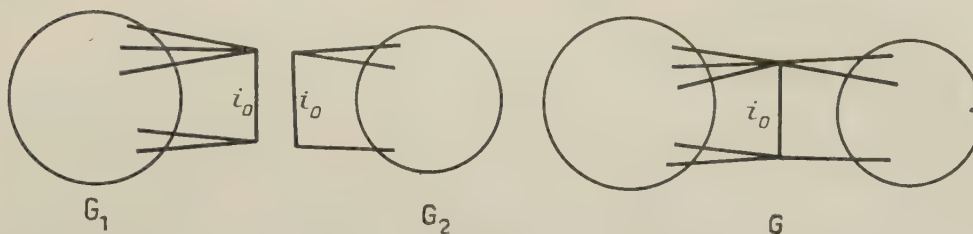


Fig. 2.

Soit i_1 un élément quelconque de I , et soit G un multigraphe associé à $[F, \{i_1\}, \emptyset]$. Les arêtes de G sont simples ou doubles; et si j, j' sont deux arêtes de G ayant mêmes extrémités, on a $\{i_1, j, j'\} \in F^*$. D'après le lemme 1, il est possible de construire une suite $b_0, b_1, \dots, b_n, \dots$, de sommets de G telle que chaque sommet est différent des deux sommets qui le suivent, que chaque sommet est relié à son successeur, et telle qu'aucun ensemble de la forme $\{b_n, b_{n+1}\}$ n'est un ensemble d'articulation. G étant fini, on peut toujours se ramener au cas où l'on a, pour un entier $r > 2$, $b_r = b_0$, les sommets $b_0, b_1, \dots, b_{r-1}$ étant tous distincts.

Si toutes les arêtes $\{b_n, b_{n+1}\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots, r-1$) sont doubles, il existe un multigraphe $[G, \emptyset, L]$ ayant la forme indiquée sur la figure 3.

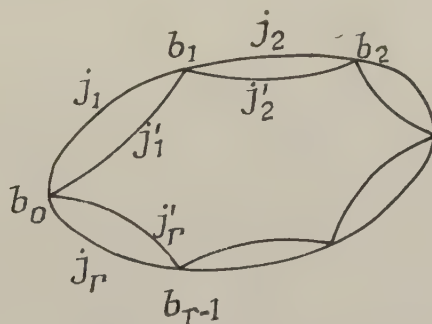


Fig. 3.

$[F^*, L, \emptyset]$ est alors engendré par les éléments

$$\{i_1, j_n, j'_n\} \quad (n = 1, 2, \dots, r)$$

et par l'élément $\{j_1, j_2, \dots, j_r\}$ (ou $\{j'_1, j'_2, \dots, j'_r\}$, mais dans ce cas on peut permuter j_1 et j'_1). Si l'on pose

$$K = \{j_1, j_2, \dots, j_r\} \quad \text{et} \quad L' = \{j'_1, j'_2, \dots, j'_r\},$$

on voit alors que $[F^*, L \cup L', K]$ est engendré par les éléments

$$\{i_1, j_1, j'_1\}, \quad \{i_2, j_2, j'_2\}, \quad \{i_3, j_3, j'_3\} \quad \text{et} \quad \{j_1, j_2, j_3\},$$

donc que $[F, K, L \cup L']$ est isomorphe à Φ . En tenant compte de la proposition 2, et du fait que F est critique et réduit, on voit qu'alors F est isomorphe à Φ .

Si, au contraire, l'une des arêtes $\{b_n, b_{n+1}\}$ est simple, on posera

$$T = \omega_G(\{b_n, b_{n+1}\}), \quad T' = \omega_G(b_n),$$

et l'on appellera i_0 l'arête d'extrémités b_n et b_{n+1} : on a bien alors

$$T, T' \in \hat{F} \quad \text{et} \quad (I - T) \cap T' = \{i_0\}.$$

THÉORÈME 2. — *Si un groupe de parties $F \subset \mathfrak{X}(I)$ n'est pas cocyclique, il existe un groupe non cocyclique, de dimension au plus égale à 6, de la forme $[F, K, \emptyset]$.*

Il s'agit de montrer que si F est un groupe critique réduit, on a $\dim F \leq 6$. On peut toujours supposer que F n'est pas isomorphe à Φ . Soient $i_0 \in I$ et $T, T' \in \hat{F}$ tels que $(I - T) \cap T' = \{i_0\}$; soit G un multigraphe associé à $[F, \{i_0\}, \emptyset]$: d'après le lemme 2, G est indécomposable. Soit $A \subset X_G$ tel que $V = \omega_G(A)$ est élémentaire, qu'il existe $V' \in \hat{F}$ vérifiant $(I - V) \cap V' = \{i_0\}$, et tel que A est minimal avec ces propriétés; on posera

$$V_1 = V \cap V' \quad \text{et} \quad V_2 = V - V'.$$

Soient $I_1, I_2, \dots, I_r$ les ensembles de décomposition de $[F, \{i_0\}, V]$: F est l'assemblage suivant V des multigraphes

$$G_k = [G, I - V \cup I_k, \emptyset] \quad (k = 1, 2, \dots, r)$$

et du multigraphe G_0 dessiné sur la figure 4. D'après le théorème 1, quel que soit k , tout sommet de G_k appartient à l'ensemble de base; et, d'autre part, le graphe des incompatibilités est constitué par un circuit de longueur impaire sans diagonales.

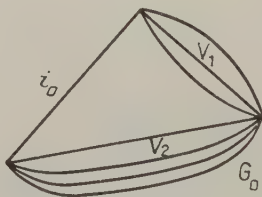


Fig. 4.

Quitte à changer de numérotation, on supposera que $I_1, I_2, \dots, I_s$ ($1 \leq s < r$) sont contenus dans l'ensemble des arêtes de G_A , et que $I_{s+1}, \dots, I_r$ sont contenus dans l'ensemble des arêtes de $G_{X_G - A}$.

Soit un morceau G_k , avec $1 \leq k \leq s$, et soit a un sommet quelconque de G_k : nous allons voir que $\omega_{G_k}(a)$ rencontre à la fois V_1 et V_2 . En effet, soit $B \subset A$ l'ensemble de sommets de G vérifiant $\omega_G(B) = \omega_{G_k}(a)$; posons

$$A' = A - B \quad \text{et} \quad \omega_G(A') = W.$$

On a

$$W = \omega_G(A) \dot{+} \omega_G(B) = V \dot{+} \omega_{G_k}(a) = \omega_{G_k}(\{\alpha_k, a\}),$$

et comme a est relié à α_k dans G_k , on a $W \in \hat{F}$. Comme A a été choisi minimal, on ne peut avoir ni $V_1 \subset W$, ni $V_2 \subset W$; on voit ainsi que $\omega_{G_k}(a)$ rencontre V_1 et V_2 .

Une conséquence de ce qui précède est que G_0 est incompatible avec chacun des morceaux $G_1, G_2, \dots, G_s$. Il en résulte que le graphe des incompatibilités est nécessairement un triangle : autrement dit, on a $s = 1$ et $r = 2$; $G'_1 = G_A$ et $G'_2 = G_{X_0 - A}$ sont les sous-multigraphes indécomposables obtenus à partir de G_1 et G_2 par suppression de α_1 et α_2 . Comme F est réduit, G'_1 et G'_2 n'ont que des arêtes simples. Nous allons maintenant distinguer deux cas.

Premier cas : G'_1 a plus d'une arête. Soit alors u une arête de G'_1 dont les extrémités ne constituent pas un ensemble d'articulation : le groupe $[F, \{u\}, \emptyset]$ est un assemblage suivant V des multigraphes $G_0, [G_1, \{u\}, \emptyset]$ et G_2 . Comme ce groupe est cocyclique, et que G_0 et $[G_1, \{u\}, \emptyset]$ sont incompatibles, G_2 et $[G_0, \{u\}, \emptyset]$ sont nécessairement compatibles. Il en résulte que $[G, \{u\}, \emptyset]$ n'est pas 3-connexe : autrement dit, ce multigraphe possède un ensemble d'articulation à deux éléments; et il est évident qu'un, et un seul, de ces deux éléments, soit a , appartient à $X_G - A$. Si l'on appelle b et b' les deux extrémités de u , on a

$$V \subset \omega_G(a) \cup \omega_G(b) \cup \omega_G(b').$$

Ceci dit, il est possible, d'après le lemme 1, de construire une suite $b_0, b_1, \dots, b_n, \dots$, d'éléments de A , telle que chaque élément est différent des deux qui le suivent, que chaque élément est relié à son successeur, et telle qu'aucun élément ne forme avec son successeur un ensemble d'articulation de G'_1 . Il existe alors une suite $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ d'éléments de $X_G - A$ telle que

$$V \subset \omega_G(a_n) \cup \omega_G(b_n) \cup \omega_G(b_{n+1}) \quad \text{quel que soit } n;$$

on a immédiatement

$$V \cap \omega_G(b_n) \subset \omega_G(a_{n+1}) \quad \text{quel que soit } n,$$

d'où

$$V \subset \omega_G(a_n) \cup \omega_G(a_{n+1}) \cup \omega_G(a_{n+2}) \quad \text{quel que soit } n.$$

On voit ainsi que G'_2 a au plus trois sommets. D'autre part, s'il existe dans A un élément $c \neq b_0, b_1, b_2$, on a nécessairement

$$V \cap \omega_G(c) \subset \omega_G(a_0) \quad \text{et} \quad V \cap \omega_G(c) \subset \omega_G(a_1),$$

d'où $a_0 = a_1$, ce qui entraîne

$$V \subset \omega_G(a_0) \cup \omega_G(b_0) \cup \omega_G(b_1) \subset \omega_G(a_0) \cup \omega_G(b_1),$$

ce qui est absurde étant donné que G_1 et G_2 sont incompatibles; G'_1 a donc trois sommets. En définitive, on a

$$\dim F = \dim \Omega_G + 1 = |X_G| \leq 3 + 3 = 6.$$

Deuxième cas : G'_1 ne possède qu'une arête. Soient alors c_1 et c_2 les deux éléments de A ; posons

$$V_3 = V \cap \omega_G(c_1) \quad \text{et} \quad V_4 = V \cap \omega_G(c_2).$$

Comme G_2 est incompatible avec G_0 et avec G_1 , aucun des quatre ensembles V_1, V_2, V_3, V_4 n'est contenu dans un ensemble de la forme $\omega_G(a)$, avec $a \subset X_G - A$. Si u est une arête de G'_2 dont les extrémités b_1 et b_2 ne constituent pas un ensemble d'articulation, l'un au moins des ensembles V_1, V_2, V_3, V_4 est contenu dans $\omega_G(b_1) \cup \omega_G(b_2)$, puisque $[G_2, \{u\}, \emptyset]$ est nécessairement compatible avec G_0 ou avec G_1 . Il résulte de ce qui précède que le nombre d'arêtes de G'_2 dont les extrémités ne constituent pas un ensemble d'articulation est au plus égal à 4. Le nombre de sommets de G'_2 est donc, d'après le lemme 1, au plus égal à 4, et l'on a

$$\dim F = \dim \Omega_G + 1 = |X_G| \leq 2 + 4 = 6.$$

C. Q. F. D.

Un examen exhaustif montre que les seuls groupes critiques réduits de dimension inférieure à 7 sont Φ, Φ^*, Φ_1 et Φ_2 , en appelant Φ_1 et Φ_2 les groupes des cycles des deux graphes de Kuratowski K_I et K_{II} (cf. fig. 5).

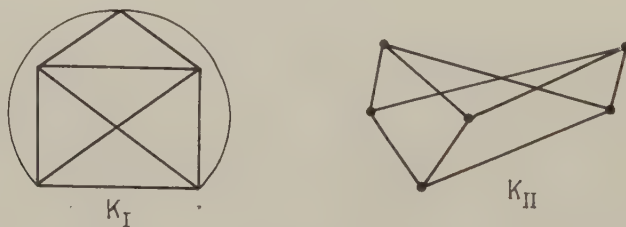


Fig. 5.

On peut donc énoncer :

COROLLAIRE. — *Pour qu'un groupe de parties $F \subset \mathfrak{F}(I)$ soit cocyclique, il faut et il suffit qu'aucun groupe de la forme $[F, K, \emptyset]$, avec $K \subset I$, ne soit du même type que Φ, Φ^*, Φ_1 ou Φ_2 ⁽¹⁰⁾.*

⁽¹⁰⁾ Cet énoncé est plus fort qu'un énoncé analogue donné par W. T. Tutte [32]. Notre démonstration est essentiellement différente, et nettement plus rapide.

4. MULTIGRAPHES PLANAIRES. — Deux multigraphes G et G' seront dit *duaux* ⁽¹¹⁾ s'ils vérifient $U_G = U_{G'}$ et $\Omega_G = M_{G'}$. Il est évident que deux multigraphes duaux sans sommets isolés sont indécomposables en même temps. Étant donné un multigraphe planaire connexe G , et une réalisation de G sur la sphère, considérons le multigraphe G^* dual de G au sens des multigraphes planaires : G^* est dual de G au sens de notre définition.

THÉORÈME 3 ⁽¹²⁾. — Si G et G' sont deux multigraphes duaux indécomposables, alors ils sont planaires. De plus, il existe une réalisation sphérique simultanée de G et de G' qui les fait apparaître comme duaux au sens des multigraphes planaires.

Nous allons raisonner par récurrence sur le nombre d'arêtes. Tout d'abord il existe au moins une arête u_0 telle que l'un au moins des deux multigraphes $[G, \{u_0\}, \emptyset]$ et $[G', \{u_0\}, \emptyset]$ est indécomposable : si G possède une arête multiple, il est immédiatement possible de trouver $u_0 \in U_G$ telle que $[G, \emptyset, \{u_0\}]$ est inarticulé, et $[G', \{u_0\}, \emptyset]$ est alors indécomposable ; si G ne possède pas d'arêtes multiples, il suffit d'appliquer le lemme 1 du paragraphe précédent.

Quitte à permuter G et G' , nous supposons que $[G, \{u_0\}, \emptyset]$ est indécomposable. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une réalisation sphérique de $[G, \{u_0\}, \emptyset]$ et $[G', \emptyset, \{u_0\}]$ qui les fait apparaître comme duaux au sens des multigraphes planaires. Ceci dit, soient a et b les deux extrémités de u_0 , et soit α le sommet de $[G, \{u_0\}, \emptyset]$ obtenu, par étrécissement, à partir des deux sommets a et b . $\omega_G(a)$ est un cocycle élémentaire de G , donc un cycle élémentaire de G' . Soient $u_0, u_1, \dots, u_k$ les arêtes par lesquelles passe successivement ce cycle : la séquence $u_1, u_2, \dots, u_k$ détermine une chaîne élémentaire de G' . Autour du sommet α , on a donc nécessairement la figure 6 a.

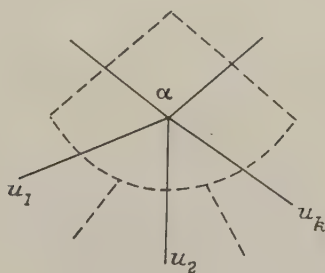


Fig. 6 a.

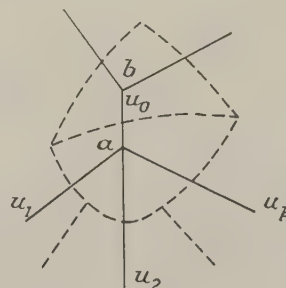


Fig. 6 b.

La figure 6 b montre que G et G' sont planaires, et qu'il existe une réalisation sphérique qui les fait apparaître comme duaux.

⁽¹¹⁾ Cette définition est équivalente à celle qu'a donnée H. Whitney dans [35].

⁽¹²⁾ Ce résultat a été établi par S. Mac Lane [24].

Remarque. — Considérons les deux multigraphes de la figure 7. Ils sont duaux, mais non indécomposables. On peut constater qu'il n'existe pas de réalisation sphérique qui les fasse apparaître comme duaux au sens des multigraphes planaires.

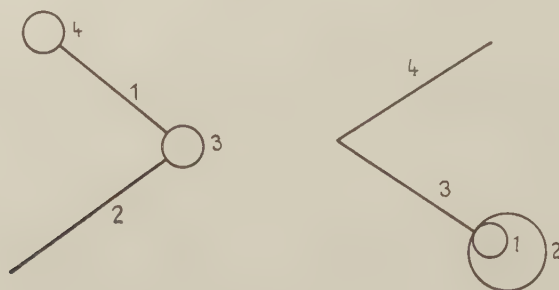


Fig. 7.

COROLLAIRE ⁽¹³⁾. — *Pour qu'un multigraphe soit planaire, il faut et il suffit qu'il admette un dual.*

THÉORÈME DE KURATOWSKI ⁽¹⁴⁾. — *Pour qu'un graphe soit planaire, il faut et il suffit qu'il n'admette pas de graphe partiel qui, après suppression des sommets isolés, soit de l'une des deux formes indiquées sur les figures 8 a et 8 b.*

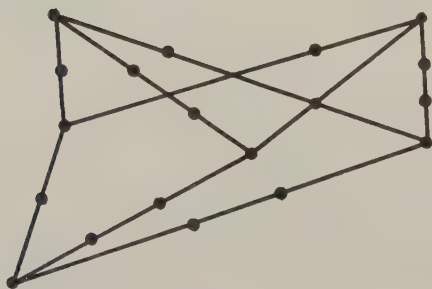


Fig. 8 a.

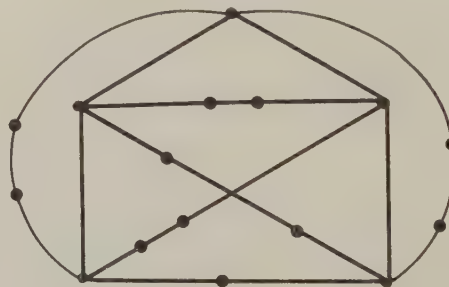


Fig. 8 b.

Ce théorème est une conséquence directe du corollaire précédent et du théorème 2.

⁽¹³⁾ Cf. [35].

⁽¹⁴⁾ Cf. [20].

CHAPITRE IV.

FLOTS ET TENSIONS.

Un *multigraphe orienté* G est défini par la donnée :

- d'un ensemble X_G dont les éléments sont appelés les *sommets* de G ;
- d'un ensemble U_G dont les éléments sont appelés les *arcs* de G ;
- d'une application qui, à tout arc $u \in U_G$, fait correspondre un couple (a, b) de sommets, distincts ou non : a s'appelle l'extrémité *initiale* de u , b s'appelle l'extrémité *terminale* de u .

A un multigraphe orienté G correspond canoniquement, de façon évidente, un multigraphe non orienté dont les sommets sont les éléments de X_G , et dont les arêtes sont les éléments de U_G ; cette correspondance canonique nous permettra de parler des cycles, cocycles, chaînes élémentaires, composantes connexes, etc., de G . On définit de manière évidente les multigraphes orientés G_A (où $A \subset X_G$), $G(L)$ (où $L \subset U_G$) et $[G, K, L]$ (où K et L sont deux ensembles disjoints inclus dans U_G). On appelle *graphe orienté* un multigraphe dans lequel, pour tout couple (a, b) de sommets, il existe au plus un arc ayant a et b comme extrémités initiale et terminale; en général, le multigraphe non orienté associé canoniquement à un graphe orienté n'est pas un graphe. Si G est un graphe orienté, U_G peut être considéré comme un ensemble de couples de sommets.

Étant donné un multigraphe orienté G , et un sommet x de G , on convient généralement de noter $\Gamma_G x$ l'ensemble des sommets y tels qu'il existe un arc ayant x et y pour extrémités initiale et terminale; et l'on note $\Gamma_G^- x$ l'ensemble des sommets y tels que $x \in \Gamma_G y$. Un graphe orienté est entièrement défini par la donnée de X_G et de l'application Γ_G de X_G dans l'ensemble des parties de X_G . Un graphe orienté G est dit *symétrique* si l'on a

$$(x, y) \in U_G \Rightarrow (y, x) \in U_G,$$

autrement dit, si $\Gamma_G = \Gamma_G^-$. A tout graphe non orienté G correspond canoniquement un graphe orienté symétrique : c'est le graphe $\bar{G}$ défini par

$$X_{\bar{G}} = X_G \quad \text{et} \quad (x, y) \in U_{\bar{G}} \Leftrightarrow \{x, y\} \in U_G.$$

Étant donné un multigraphe orienté G , on appelle *potentiel* sur G tout élément de $\mathbf{R}^{X_G}$. On appelle *tension* sur G tout élément $\theta \in \mathbf{R}^{U_G}$ pour lequel il existe un potentiel t tel que, pour tout arc u , on a $\theta_u = t_a - t_b$, en appelant a et b les extrémités initiale et terminale de u . Nous noterons Θ_G' l'ensemble des tensions sur G , Θ_G l'ensemble des tensions entières sur G : Θ_G' est un

sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{U_G}$, et Θ_G est un sous-groupe de $\mathbf{Z}^{U_G}$. Étant donné un ensemble $A \subset X_G$, considérons sa fonction caractéristique t^A ; et appelons $\omega_G^+(A)$ [resp. $\omega_G^-(A)$] l'ensemble des arcs de $\omega_G(A)$ qui ont leur extrémité initiale (resp. terminale) dans A . La tension θ^A associée au potentiel t^A est définie par

$$\theta_u^A = \begin{cases} 1 & \text{si } u \in \omega_G^+(A), \\ -1 & \text{si } u \in \omega_G^-(A), \\ 0 & \text{si } u \notin \omega_G(A); \end{cases}$$

Θ^A est un élément simple de Θ_G .

PROPOSITION 1. — Θ_G est un sous-groupe régulier; on a $\dot{S}(\Theta_G) = \Omega_G$ et $\dim \Theta_G = n - p$, en appelant n et p les nombres de sommets et de composantes connexes de G ; Θ'_G est le sous-espace vectoriel engendré par Θ_G .

Nous savons déjà que tout cocycle est le support d'une tension simple. Inversement, soit θ une tension simple, et soit t un potentiel entier canoniquement associé à θ ; on a

$$S(\theta) = \dot{S}(\theta) = \omega_G(\dot{S}(t)).$$

Comme le groupe (resp. l'espace vectoriel) des potentiels entiers (resp. réels) est engendré par les $t^A (A \subset X_G)$, il est évident que Θ_G (resp. Θ'_G) est engendré par les $\theta^A (A \subset X_G)$: Θ'_G est donc le sous-espace vectoriel engendré par Θ_G . Or l'application linéaire canonique qui à tout potentiel associe une tension a pour noyau l'ensemble des potentiels qui sont constants sur chaque composante connexe; on a ainsi

$$\dim \Theta'_G = n - p = \dim \Omega_G.$$

La proposition est ainsi démontrée (cf. chap. II, § 3, prop. 6).

On appelle *flot* sur G tout élément $\varphi \in \mathbf{R}^{U_G}$ vérifiant

$$\langle \theta^a, \varphi \rangle = 0 \quad \text{quel que soit } a \in X_G.$$

Nous noterons Φ'_G l'ensemble des flots sur G , et Φ_G l'ensemble des flots entiers sur G .

PROPOSITION 2. — Φ_G est le sous-groupe régulier orthogonal à Θ_G ; on a $\dot{S}(\Phi_G) = M_G$. Φ'_G est le sous-espace vectoriel engendré par Φ_G .

(Évident.)

Remarque. — Étant donné un cocycle élémentaire, il existe exactement deux éléments primitifs de Θ_G ayant ce cocycle pour support, et ces deux éléments sont opposés (cf. chap. I, § 3, prop. 3); on voit ainsi que les éléments primitifs de Θ_G sont les éléments de la forme θ^A , où G_A est

connexe, et où G_{C-A} est connexe, en appelant C la composante connexe de G qui contient A ; et l'on a

$$S^+(\theta^A) = \omega_G^+(A) \quad \text{et} \quad S^-(\theta^A) = \omega_G^-(A).$$

Soit μ un cycle élémentaire de G : on peut parcourir ce cycle de deux façons opposées; choisissons un sens de parcours et appelons μ^+ l'ensemble des arcs qui sont dans le sens du parcours, μ^- l'ensemble des arcs qui sont dans le sens opposé; il existe un élément primitif $c \in \Phi_G$ vérifiant $S^+(c) = \mu^+$ et $S^-(c) = \mu^-$, et les seuls éléments primitifs de Φ_G ayant μ pour support sont c et $(-c)$.

PROPOSITION 3 ⁽¹⁵⁾. — Soit G un multigraphe orienté, soit V un arbre de G , et soit $W = U_G - V$ le coarbre complémentaire. L'application de restriction $\varphi \rightarrow \varphi_W$ est un isomorphisme de Φ'_G sur $\mathbf{R}^W$, et de Φ_G sur $\mathbf{Z}^W$. L'application de restriction $\theta \rightarrow \theta_V$ est un isomorphisme de Θ'_G sur $\mathbf{R}^V$ et de Θ_G sur $\mathbf{Z}^V$.

(Évident.)

PROPOSITION 4 [18]. — Soit un multigraphe orienté G , et soient des entiers (resp. des nombres réels) finis ou infinis a_u et b_u ($u \in U_G$) vérifiant

$$a_u \leq b_u \quad \text{quel que soit } u \in U_G.$$

Pour qu'il existe un flot entier φ (resp. un flot réel φ) vérifiant

$$a_u \leq \varphi_u \leq b_u \quad \text{quel que soit } u \in U_G,$$

il faut et il suffit qu'on ait

$$\sum_{u \in \omega_G^+(A)} b_u \geq \sum_{u \in \omega_G^-(A)} a_u \quad \text{quel que soit } A \subset X_G$$

(cf. chap. II, § 3, prop. 1).

PROPOSITION 5 [28]. — Soit un multigraphe orienté G , et soient des entiers (resp. des nombres réels) finis ou infinis a_u et b_u ($u \in U_G$) vérifiant

$$a_u \leq b_u \quad \text{quel que soit } u \in U_G.$$

Pour qu'il existe une tension entière θ (resp. une tension réelle θ) vérifiant

$$a_u \leq \theta_u \leq b_u \quad \text{quel que soit } u \in U_G,$$

il faut et il suffit que pour tout cycle élémentaire μ , et pour tout sens de parcours sur ce cycle, on ait

$$\sum_{u \in \mu^+} b_u \geq \sum_{u \in \mu^-} a_u$$

(cf. chap. II, § 3, prop. 1).

⁽¹⁵⁾ Pour les propositions 3 à 11, cf. [2].

Dorénavant nous noterons Φ_G^+ (resp. $\Phi_G'^+, \Theta_G^+, \Theta_G'^+$) l'ensemble des éléments positifs de Φ_G (resp. $\Phi_G', \Theta_G, \Theta_G'$). On appelle *circuit élémentaire* tout flot primitif positif; on appelle *cocircuit élémentaire* toute tension primitive positive. Si G est un graphe, un circuit c est entièrement déterminé par la séquence $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$ (définie à une permutation circulaire près sur les indices $0, 1, 2, \dots, k$) des sommets qu'on rencontre lorsqu'on parcourt le cycle $\mu = S(c)$ dans le sens défini par $\mu^+ = \mu$: on le note généralement $[x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, x_0]$.

PROPOSITION 6. — *Les éléments de Φ_G^+ (resp. $\Phi_G'^+, \Theta_G^+, \Theta_G'^+$) sont les combinaisons linéaires positives à coefficients entiers (resp. réels, entiers, réels) des circuits (resp. circuits, cocircuits, cocircuits) élémentaires de G .*

(Cf. chap. II, § 4, prop. 1.)

PROPOSITION 7 [25]. — *Soit un multigraphe orienté G dont les arcs sont colorés, soit en rouge, soit en vert, soit en noir, et soit u_0 un arc coloré en noir. L'une, et l'une seulement, des deux propositions suivantes est vérifiée :*

(1) *Il passe par l'arc u_0 un cycle élémentaire μ uniquement rouge et noir, dont tous les arcs noirs sont orientés dans le même sens (c'est-à-dire appartiennent tous, soit à μ^+ , soit à μ^-);*

(2) *Il passe par l'arc u_0 un cocycle élémentaire $\omega_G(A)$ uniquement vert et noir, dont tous les arcs noirs sont orientés dans le même sens [c'est-à-dire appartiennent tous, soit à $\omega_G^+(A)$, soit à $\omega_G^-(A)$].*

(Cf. chap. II, § 4, prop. 2.)

PROPOSITION 8. — *Étant donné un multigraphe orienté G , les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) *G ne possède pas de circuits élémentaires;*

(2) *Par tout arc de G , il passe un cocircuit élémentaire (c'est-à-dire : il existe un cocircuit élémentaire dont le support contient cet arc).*

(Cf. chap. II, § 4, corollaire de la proposition 2.)

Soit un multigraphe orienté G . On définit dans G un *chemin élémentaire* lorsqu'on se donne une séquence $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$ de sommets distincts et une séquence $u_1, u_2, \dots, u_k$ d'arcs distincts tels que u_i a x_{i-1} pour extrémité initiale et x_i pour extrémité terminale ($i = 1, 2, \dots, k$). Si G est un graphe, un chemin élémentaire de G est entièrement déterminé par la séquence des sommets par lesquels il passe : on le note généralement $[x_0, x_1, x_2, \dots, x_k]$.

Étant donné un multigraphe orienté G , considérons dans X_G la relation binaire « $a = b$ où il existe un chemin élémentaire allant de a vers b et un chemin élémentaire allant de b vers a ». C'est une relation d'équivalence.

Les classes d'équivalences s'appellent les *composantes fortement connexes* de G . On dit que G est *fortement connexe* s'il n'a qu'une composante fortement connexe, autrement dit si, pour tout couple (a, b) de sommets distincts, il existe un chemin élémentaire allant de a vers b .

PROPOSITION 9. — *Étant donné un multigraphe orienté G , les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

- (1) G ne possède pas de cocircuits élémentaires;
- (2) Par tout arc de G , il passe un circuit élémentaire;
- (3) Les sous-multigraphes engendrés par les composantes connexes de G sont fortement connexes.

L'équivalence de (1) et (2) est évidente (cf. chap. II, § 4, corollaire de la proposition 2). Si G possède un cocircuit élémentaire, l'un au moins des sous-multigraphes engendré par les composantes connexes de G n'est pas fortement connexe. Inversement, soit C une composante connexe de G , et supposons que G_C ne soit pas fortement connexe; soit $A \subset C$ une composante fortement connexe de G_C , et soit $u \in \omega_C(A)$: il n'existe pas de circuit élémentaire passant par u , car si un tel circuit existait, les deux extrémités de u appartiendraient à la même composante fortement connexe.

PROPOSITION 10. — *Soit un multigraphe orienté G , sans circuits, ayant n sommets et p composantes connexes. Il existe, dans G , $n - p$ cocircuits élémentaires qui engendrent Θ_C .*

(Cf. le théorème du chapitre II, § 4.)

PROPOSITION 11. — *Soit un multigraphe orienté G , fortement connexe, ayant n sommets et m arcs. Il existe, dans G , $m - n + 1$ circuits élémentaires qui engendrent Φ_C .*

(Cf. le théorème du chapitre II, § 4.)

Étant donné un sous-groupe régulier $F \subset \mathbf{Z}^I$, et deux ensembles disjoints $K, L \subset I$, nous noterons $[F, K, L]$ le sous-groupe régulier de $\mathbf{Z}^{I-K-L}$ constitué par les restrictions à $I - K - L$ des éléments de F à supports inclus dans $I - K$.

PROPOSITION 12. — *On a*

$$[F, K, L]^* = [F^*, L, K].$$

(Évident.)

PROPOSITION 13. — *Si L, L', K, K' sont des ensembles disjoints deux à deux et inclus dans I , on a*

$$[[F, K, L], K', L'] = [F, K \cup K', L \cup L'].$$

(Évident.)

PROPOSITION 14. — Si K et L sont deux ensembles disjoints inclus dans I , on a

$$\dot{S}([F, K, L]) = [\dot{S}(F), K, L].$$

En effet, on a

$$[\dot{S}(F), K, L] \subset \dot{S}([F, K, L]) \quad \text{et} \quad [\dot{S}(F^*), L, K] \subset \dot{S}([F^*, L, K]).$$

Or on a

$$[\dot{S}(F), K, L]^* = [\dot{S}^*(F), L, K] = [\dot{S}(F^*), L, K]$$

et

$$\dot{S}^*([F, K, L]) = \dot{S}([F, K, L]^*) = \dot{S}([F^*, L, K]);$$

d'où l'égalité annoncée.

PROPOSITION 15. — Soit un multigraphe orienté G , et soient K et L deux ensembles disjoints d'arêtes de G . Le groupe des tensions entières de $[G, K, L]$ est $[\Theta_G, K, L]$, et son groupe des flots entiers est $[\Phi_G, L, K]$.

(Évident.)

PROPOSITION 16. — Soit un sous-groupe régulier $F \subset \mathbf{Z}^I$. Pour qu'il existe un multigraphe orienté G vérifiant $U_G = I$ et $\Theta_G = F$, il faut et il suffit que $\dot{S}(F)$ soit cocyclique.

La condition est évidemment nécessaire. Inversement, nous allons démontrer, par récurrence sur $|I|$, que si G est un multigraphe non orienté associé à $\dot{S}(F)$, il est possible d'orienter les arêtes de G de manière telle que le multigraphe $\bar{G}$ obtenu vérifie $\Theta_{\bar{G}} = F$. On peut toujours supposer que G est indécomposable. Distinguons deux cas.

Premier cas : Il existe dans G un cycle à deux éléments, soit $\{i_1, i_2\}$. Soit alors c l'élément de F^* qui vérifie $S(c) = \{i_1, i_2\}$ et $c_{i_1} = 1$. D'après l'hypothèse de récurrence, il est possible d'orienter les arêtes de $[G, \emptyset, \{i_2\}]$ de manière que le groupe des tensions du multigraphe obtenu soit égal à $[F, \emptyset, \{i_2\}]$. Il ne reste plus alors qu'à orienter i_2 dans le même sens que i_1 si $c_{i_2} = -1$, dans le sens contraire si $c_{i_2} = 1$.

Deuxième cas : G ne possède pas d'arêtes multiples. Il existe alors (cf. le lemme 1 du chapitre III, § 3) une arête i_0 telle que $[G, \{i_0\}, \emptyset]$ est indécomposable. D'après l'hypothèse de récurrence, il est possible d'orienter $G' = [G, \{i_0\}, \emptyset]$ de manière que le groupe des tensions du multigraphe $\bar{G}'$ obtenu soit égal à $[F, \{i_0\}, \emptyset]$. Soient a et b les deux extrémités de i_0 dans G , soit α le sommet obtenu à partir de a et b par étreçissement de i_0 , et soient c et c' les deux éléments de F vérifiant

$$S(c) = \omega_G(a), \quad S(c') = \omega_G(b), \quad c_{i_0} = 1 \quad \text{et} \quad c'_{i_0} = -1.$$

Comme $\omega_{\bar{c}}(\alpha)$ est un élément minimal de $\dot{S}(F)$, les ensembles $S^+(c+c')$ et $S^-(c+c')$ sont égaux à l'ordre près, aux ensembles $\omega_{\bar{c}}^+(\alpha)$ et $\omega_{\bar{c}}^-(\alpha)$. Soit $\bar{G}$ le multigraphe orienté obtenu à partir de G en orientant les arêtes autres que i_0 de la même manière qu'elles le sont dans $\bar{G}'$, et en orientant i_0 de a vers b si $S^+(c+c') = \omega_{\bar{c}}^+(\alpha)$, de b vers a si $S^+(c+c') = \omega_{\bar{c}}^-(\alpha)$: il est évident qu'on a $\Theta_{\bar{c}} = F$.

PROPOSITION 17. — *Soit un sous-groupe régulier $F \subset \mathbf{Z}^I$. Pour qu'il existe un multigraphe orienté G vérifiant $U_G = I$ et $\Theta_G = F$, il faut et il suffit qu'aucun groupe de parties de I de la forme $[\dot{S}(F), K, \emptyset]$ ne soit du même type que Φ_1 ou Φ_2 .*

En effet, on vérifie aisément qu'il n'existe pas de sous-groupe régulier F tel que $\dot{S}(F)$ soit isomorphe à Φ . Il en résulte, d'après la proposition 14, qu'aucun groupe de parties de la forme $[\dot{S}(F), K, \emptyset]$ ne peut être du même type que Φ ou que Φ^* .

CHAPITRE V.

DEMI-DEGRÉS ET CIRCUITS DANS UN GRAPHE ORIENTÉ.

1. INTRODUCTION. — G. A. Dirac [6], P. Erdős et T. Gallai [8] ont énoncé un certain nombre de conditions suffisantes pour qu'existe, dans un graphe non orienté, une chaîne hamiltonienne, ou un cycle hamiltonien ⁽¹⁶⁾, ou un cycle de longueur supérieure à un nombre donné, etc.; ces conditions portent, soit sur le nombre d'arêtes, soit sur les degrés ⁽¹⁷⁾ du graphe. Nous allons citer les principales d'entre elles; pour la commodité de l'exposé, nous parlerons de graphes symétriques au lieu de parler de graphes non orientés.

THÉORÈME 1 [6]. — *Si, dans un graphe symétrique sans boucles G , on a*

$$|\Gamma_G x| \geq \frac{1}{2} |X_G| \quad \text{quel que soit } x \in X_G,$$

alors ce graphe possède au moins un circuit hamiltonien.

⁽¹⁶⁾ On appelle cycle (resp. chaîne, chemin, circuit) *hamiltonien* un cycle (resp. une chaîne, un chemin, un circuit) élémentaire qui passe par tous les sommets du graphe.

⁽¹⁷⁾ Étant donné un graphe non orienté G , on appelle *degré* en un sommet x le nombre d'éléments de $\omega(x)$. Étant donné un graphe orienté G , on appelle *demi-degré extérieur* (resp. *intérieur*) en un sommet x le nombre d'éléments de $\omega_{\bar{c}}^+(x)$ [resp. de $\omega_{\bar{c}}^-(x)$].

THÉORÈME 2 [8]. — Si, dans un graphe symétrique sans boucles G , on a

$$|\Gamma_G x| \geq \frac{1}{2} [|X_G| + 1] \quad \text{quel que soit } x \in X_G,$$

alors, quels que soient $a, b \in X_G$, il existe un chemin hamiltonien allant de a vers b .

THÉORÈME 3 [8]. — Si, dans un graphe symétrique indécomposable G , on a

$$|\Gamma_G x| \geq d \quad \text{quel que soit } x \in X_G, \quad \text{avec } 0 < d \leq \frac{1}{2} |X_G|,$$

alors il existe dans G un circuit élémentaire de longueur au moins égale à $2d$.

THÉORÈME 4. — Si, dans un graphe symétrique sans boucles G , on a

$$|U_G| > l[|X_G| - 1],$$

alors il existe dans G un circuit élémentaire de longueur supérieure à l .

Nous avons cherché à étendre ces résultats, de façon aussi naturelle que possible, aux graphes orientés quelconque. Ce chapitre sera consacré à l'exposé des résultats obtenus, résultats positifs en ce qui concerne les théorèmes 1 et 2, négatifs en ce qui concerne les théorèmes 3 et 4.

2. DEMI-DEGRÉS ET CIRCUITS HAMILTONIENS.

THÉORÈME 5. — Si, dans un graphe orienté G fortement connexe, on a

$$|\Gamma_G x| + |\Gamma_G^- x| > |X_G| \quad \text{quel que soit } x \in X_G,$$

alors ce graphe possède au moins un circuit hamiltonien.

En effet, si l'énoncé qui précède était faux, on pourrait trouver un graphe G qui contredise cet énoncé, et tel que tout graphe ayant moins de sommets que G vérifie cet énoncé. Nous allons montrer que cela conduirait à une contradiction.

Soit dans G un circuit élémentaire de longueur maximale

$$[x_0, x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_0]; \quad \text{on a } 2 \leq m < |X_G|.$$

Posons

$$X_0 = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{m-1}\}$$

et appelons $X_1, X_2, \dots, X_p$ les composantes fortement connexes du sous-graphe engendré par $X_G - X_0$.

1° Les sous-graphes engendrés par $X_1, X_2, \dots, X_p$ possèdent chacun au moins un circuit hamiltonien.

En effet, soit x un élément quelconque d'une composante quelconque X_r ($1 \leq r \leq p$) : on a

$$y \in \Gamma_G x \Rightarrow y \notin \Gamma_G^- x \quad \text{quel que soit } y \in X_G - X_0 - X_r$$

et

$$x_i \in \Gamma_G^- x \Rightarrow x_{i+1} \notin \Gamma_G x \quad \text{quel que soit } x_i \in X_0 \quad (18).$$

On a donc

$$|X_r \cap \Gamma_G x| + |X_r \cap \Gamma_G^- x| \geq |X_r| \quad \text{quel que soit } x \in X_r.$$

Le sous-graphe engendré par X_r , qui est fortement connexe, et qui a moins de sommets que G , possède donc un circuit hamiltonien.

2° Un au moins des ensembles X_s ($s = 1, 2, \dots, p$) vérifie

$$X_s \cap \Gamma_G X_0 \neq \emptyset \quad \text{et} \quad X_s \cap \Gamma_G^- X_0 \neq \emptyset \quad (19).$$

Le graphe G étant fortement connexe, il existe au moins un ensemble X_r ($1 \leq r \leq p$) vérifiant

$$X_r \cap \Gamma_G X_0 \neq \emptyset.$$

On a

$$y \in \Gamma_G x \Rightarrow y \notin \Gamma_G^- x \quad \text{quels que soient } x \in X_r \quad \text{et} \quad y \in X_G - X_0 - X_r.$$

Supposons que la proposition annoncée soit fausse : on a alors

$$y \in \Gamma_G x \Rightarrow y \notin \Gamma_G^- x \quad \text{quels que soient } x \in X_0 \quad \text{et} \quad y \in X_G - X_0 - X_r;$$

d'où il résulte :

$$|(X_0 \cup X_r) \cap \Gamma_G x| + |(X_0 \cup X_r) \cap \Gamma_G^- x| \geq |X_0 \cup X_r| \quad \text{quel que soit } x \in X_0 \cup X_r.$$

Comme G est fortement connexe, et que d'autre part on a par hypothèse $X_r \cap \Gamma_G^- X_0 = \emptyset$, il existe dans G au moins un chemin élémentaire de longueur supérieure à 1, $[z_0, z_1, z_2, \dots, z_t]$, vérifiant

$$z_0 \in X_r, \quad z_t \in X_0 \quad \text{et} \quad z_1, \dots, z_{t-1} \notin X_0 \cup X_r.$$

Le graphe obtenu en ajoutant au sous-graphe engendré par $X_0 \cup X_r$ un arc admettant z_0 et z_t pour extrémités initiale et terminale est fortement connexe, et il possède moins de sommets que G : il possède donc au moins un circuit hamiltonien. En remplaçant dans ce circuit l'arc (z_0, z_t) par le chemin $[z_0, z_1, z_2, \dots, z_t]$, on obtient un circuit élémentaire de G de longueur supérieure à m , ce qui est absurde. La proposition est ainsi démontrée.

(18) Les indices qui numérotent les sommets du circuit $[x_0, x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_0]$ seront traités comme des entiers modulo m : pour $i = m - 1$, la notation x_{i+1} représentera le sommet x_0 .

(19) Étant donné un multigraphe G , et un ensemble $A \subset X_G$, on convient de noter

$$\Gamma_G A = \bigcup_{x \in A} \Gamma_G x \quad \text{et} \quad \Gamma_G^- A = \bigcup_{x \in A} \Gamma_G^- x.$$

Dorénavant, quitte à changer de numérotation, nous supposons que X_1 vérifie

$$X_1 \cap \Gamma_G X_0 \neq \emptyset \quad \text{et} \quad X_1 \cap \Gamma_G^- X_0 \neq \emptyset.$$

Le sous-graphe engendré par X_1 possède, d'après 1^o, un circuit hamiltonien $[y_0, y_1, y_2, \dots, y_{q-1}]$ ⁽²⁰⁾ ($q \leq m$).

3^o On a

$$x_j \in \Gamma_G^- y_j \Rightarrow x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+q} \notin \Gamma_G y_{j-1}$$

quels que soient $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$ et $j = 0, 1, 2, \dots, q-1$.

En effet, si l'on a à la fois

$$x_i \in \Gamma_G^- y_j \quad \text{et} \quad x_k \in \Gamma_G y_{j-1},$$

x_k étant l'un des sommets $x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+q}$, alors le graphe G possède un circuit de longueur supérieure à m , à savoir le circuit

$$[x_i, y_j, y_{j-1}, y_{j-2}, \dots, y_{j-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_i],$$

ce qui est absurde.

4^o On a

$$y_j \in \Gamma_G X_0 \Rightarrow |X_0 \cap \Gamma_G y_{j-1}| \leq m - q$$

et

$$y_{j-1} \in \Gamma_G^- X_0 \Rightarrow |X_0 \cap \Gamma_G^- y_j| \leq m - q$$

pour $j = 0, 1, 2, \dots, q-1$.

Cela résulte immédiatement de ce qui précède.

5^o On a

$$X_1 \subset \Gamma_G X_0 \cap \Gamma_G^- X_0.$$

En effet, on a, quel que soit $j = 0, 1, 2, \dots, q-1$,

$$|(X_G - X_0 - X_1) \cap \Gamma_G y_j| + |(X_G - X_0 - X_1) \cap \Gamma_G^- y_j| \leq |X_G - X_0 - X_1|$$

et

$$|X_1 \cap \Gamma_G y_j| + |X_1 \cap \Gamma_G^- y_j| \leq 2(q-1);$$

d'où

$$|X_0 \cap \Gamma_G y_j| + |X_0 \cap \Gamma_G^- y_j| \geq m + q - 2(q-1) = m - q + 2.$$

D'après 4^o, on a donc

$$y_j \in \Gamma_G X_0 \Rightarrow |X_0 \cap \Gamma_G^- y_{j-1}| \geq 2 \Rightarrow y_{j-1} \in \Gamma_G X_0$$

et

$$y_{j-1} \in \Gamma_G^- X_0 \Rightarrow |X_0 \cap \Gamma_G y_j| \geq 2 \Rightarrow y_j \in \Gamma_G^- X_0.$$

⁽²⁰⁾ Les indices qui numérotent les sommets de ce circuit seront traités comme des entiers modulo q .

Comme, d'autre part, on a

$$X_1 \cap \Gamma_G X_0 \neq \emptyset \quad \text{et} \quad X_1 \cap \Gamma_G^- X_0 \neq \emptyset,$$

on a bien la propriété annoncée.

6° On a

$$|X_0 \cap \Gamma_G^- \gamma_j| + |X_0 \cap \Gamma_G \gamma_{j-1}| \leq m - q + 1 \quad \text{pour } j = 0, 1, 2, \dots, q-1.$$

En effet, d'après 5°, on a

$$X_0 \cap \Gamma_G^- \gamma_j \neq \emptyset \quad \text{et} \quad X_0 \cap \Gamma_G \gamma_{j-1} \neq \emptyset.$$

Soit k le plus petit entier positif pour lequel il existe un indice i_0 vérifiant

$$x_{i_0} \in \Gamma_G^- \gamma_j \quad \text{et} \quad x_{i_0+k} \in \Gamma_G \gamma_{j-1};$$

d'après 3°, on a nécessairement $k > q$.

On a, d'après 3°,

$$x_i \in \Gamma_G \gamma_j \quad \Rightarrow \quad x_{i+1} \notin \Gamma_G \gamma_{j-1} \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, \dots, m-1;$$

d'autre part, d'après la définition de k et de i_0 , on a

$$x_i \notin \Gamma_G^- \gamma_j \quad \text{et} \quad x_{i+1} \notin \Gamma_G \gamma_{j-1} \quad \text{pour } i = i_0 + 1, i_0 + 2, \dots, i_0 + q - 1.$$

Il en résulte l'inégalité annoncée.

7° Nous aboutissons maintenant à la contradiction annoncée.

En effet, nous avons vu dans 5° qu'on a

$$|X_0 \cap \Gamma_G \gamma_j| + |X_0 \cap \Gamma_G^- \gamma_{j-1}| \leq m - q + 2 \quad \text{pour } j = 0, 1, 2, \dots, q-1,$$

ce qui donne

$$\sum_{j=0}^{q-1} |X_0 \cap \Gamma_G \gamma_j| + \sum_{j=0}^{q-1} |X_0 \cap \Gamma_G^- \gamma_j| \geq q(m - q + 2).$$

Or, d'après 6°, on a

$$\sum_{j=0}^{q-1} [|X_0 \cap \Gamma_G^- \gamma_j| + |X_0 \cap \Gamma_G \gamma_{j-1}|] \leq q(m - q + 1).$$

D'où, en définitive,

$$q(m - q + 2) \leq q(m - q + 1),$$

ce qui est absurde.

C. Q.F. D.

Montrons maintenant que le théorème 5, qui vient d'être démontré, est effectivement une généralisation du théorème 1. En effet, soit G un graphe symétrique sans boucles vérifiant

$$|\Gamma_G x| \geq \frac{1}{2} |X_G| \quad \text{quel que soit } x \in X_G.$$

Remarquons d'abord que G est nécessairement connexe, sans quoi, en appelant A une composante connexe de G vérifiant

$$|A| \leq \frac{1}{2} |X_G|$$

on aurait

$$|\Gamma_G x| < |A| \leq \frac{1}{2} |X_G| \quad \text{pour } x \in A.$$

En appliquant le théorème 5, on voit que G possède un circuit hamiltonien.

Nous avons cherché à renforcer l'énoncé du théorème 5 de deux façons :

- en supprimant la condition de forte connexité;
- en allégeant la condition imposée aux demi-degrés.

Dans chacun de ces deux cas, nous avons abouti à un contre-exemple.

Contre-exemple 1. — Soit un entier quelconque $p \geq 2$, et soient deux ensembles disjoints X_1 et X_2 ayant chacun p éléments.

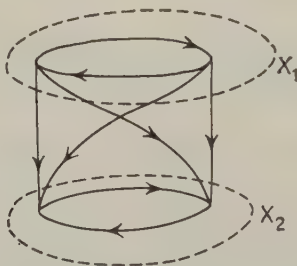


Fig. 9.

Considérons le graphe orienté G (voir fig. 9) défini par

$$X_G = X_1 \cup X_2$$

et

$$y \in \Gamma_G x \Leftrightarrow x \in X_1 \text{ ou } y \in X_2 \text{ et } y \neq x.$$

On a

$$|\Gamma_G x| + |\Gamma_G^- x| = 3p - 2 \geq 2p = |X_G| \quad \text{quel que soit } x \in X_G.$$

Cependant, G n'est pas fortement connexe, et *a fortiori* n'admet pas de circuits hamiltoniens.

Contre-exemple 2. — Soit un entier quelconque $p \geq 2$, et soit le graphe orienté G (voir fig. 10) défini par

$$X_G = \{0, 1, 2, \dots, p\},$$

$$y \in \Gamma_G x \iff x < y \quad \text{ou} \quad y = 0 \quad \text{et} \quad y \neq x.$$

Soit un entier k avec $1 \leq k < p$, et soit G_k le graphe obtenu en supprimant dans G l'arc $(k, k+1)$. G_k est un graphe fortement connexe de $p+1$ sommets, et l'on a

$$|\Gamma_{G_k} x| + |\Gamma_{\bar{G}_k} x| = \begin{cases} 2p & \text{pour } x = 0; \\ p+1 & \text{pour } x \neq 0, k, k+1; \\ p & \text{pour } x = k, k+1. \end{cases}$$

Or on peut remarquer que G_k ne possède aucun circuit hamiltonien.

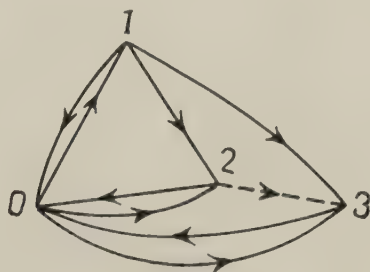


Fig. 10.

3. DEMI-DEGRÉS ET CHEMINS HAMILTONIENS. — Du théorème 5 nous pouvons déduire une conséquence importante.

THÉORÈME 6. — *Si un graphe orienté G vérifie*

$$|\Gamma_G x| + |\Gamma_{\bar{G}} x| \geq |X_G| - 1 \quad \text{quel que soit } x \in X_G,$$

il possède au moins un chemin hamiltonien.

En effet, soit $\bar{G}$ le graphe obtenu en ajoutant à G un sommet a , et, pour chaque $x \in X_G$, deux arcs opposés (a, x) et (x, a) . $\bar{G}$ est fortement connexe; on a

$$|X_{\bar{G}}| = |X_G| + 1$$

et

$$|\Gamma_{\bar{G}} x| + |\Gamma_{\bar{\bar{G}}} x| \geq |X_G| + 1 \quad \text{quel que soit } x \in X_{\bar{G}}.$$

D'après le théorème 5, $\bar{G}$ possède un circuit hamiltonien. Donc G possède un chemin hamiltonien.

Remarquons que le théorème de König qui affirme que tout graphe complet possède au moins un chemin hamiltonien, découle immédiatement du théorème 6.

Nous allons maintenant essayer de généraliser le théorème 2. Donnons d'abord une définition.

DÉFINITION. — Nous dirons qu'un graphe orienté est *fortement h-connexe* s'il est fortement connexe, et s'il le reste après suppression de $h - 1$ sommets quelconques ($h < |X_G|$).

L'énoncé qui vient à l'esprit tout naturellement pour étendre le théorème 2 au cas des graphes orientés est le suivant :

« Si dans un graphe orienté connexe sans boucles G , on a

$$|\Gamma_G x| + |\Gamma_G^- x| \geq |X_G| + 1 \quad \text{quel que soit } x \in X_G,$$

alors pour tout couple (a, b) de sommets distincts, il existe au moins un chemin hamiltonien partant de a et finissant en b . »

Mais cet énoncé est infirmé par le contre exemple suivant :

Contre-exemple 3. — Considérons le graphe à six sommets de la figure 11. En tout sommet la somme des deux demi-degrés est égale à 7. Cependant, il n'existe pas de chemin hamiltonien commençant en A et finissant en B. Remarquons par ailleurs que le graphe considéré est fortement 2-connexe.

Le contre-exemple précédent laisse place à un énoncé plus faible.

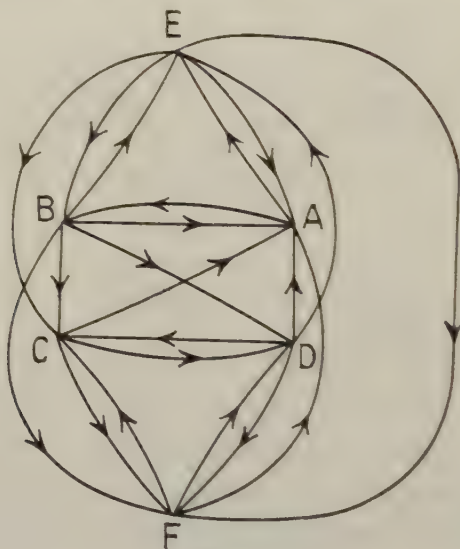


Fig. 11.

THÉORÈME 7. — Si un graphe orienté fortement 2-connexe G vérifie

$$|\Gamma_G x| + |\Gamma_G^- x| \geq |X_G| + 1 \quad \text{quel que soit } x \in X_G,$$

alors pour toute paire $\{a, b\}$ de sommets distincts, il existe au moins un chemin hamiltonien ayant a et b pour extrémités ⁽²¹⁾. Cet énoncé ne précise pas l'orientation du chemin hamiltonien qui joint a et b .

⁽²¹⁾ Cet énoncé généralise le théorème 2. En effet, si un graphe symétrique sans boucles G vérifie

$$|\Gamma_G x| \geq \frac{1}{2} [|X_G| + 1] \quad \text{quel que soit } x \in X_G,$$

il est nécessairement inarticulé.

Ce théorème va se démontrer très facilement à partir du théorème 5 ⁽²²⁾. A tout couple (a, b) de sommets distincts, associons le graphe $G_{a,b}$ obtenu en supprimant dans G les sommets a et b , en ajoutant un sommet c , et pour chaque sommet $x \neq a, b$, un arc (c, x) chaque fois qu'on a $x \in \Gamma_G a$, et un arc (x, c) chaque fois qu'on a $x \in \Gamma_G b$.

Un tel graphe $G_{a,b}$ est fortement connexe. En effet, G étant fortement 2-connexe, il existe dans G , quel que soit le sommet $x \neq a, b$ un chemin allant de a à x sans passer par b , et un chemin allant de x à b sans passer par a ; or cela revient à dire qu'il existe dans $G_{a,b}$, quel que soit le sommet $x \neq c$, un chemin allant de c à x et un chemin allant de x à c . D'autre part, en tout sommet de $G_{a,b}$ autre que c , la somme des deux demi-degrés est supérieure ou égale à $|\Gamma_G| - 1$, c'est-à-dire au nombre de sommets de $G_{a,b}$. Enfin remarquons que $G_{a,b}$ admet un circuit hamiltonien si, et seulement si, il existe dans G un chemin hamiltonien commençant en a et finissant en b .

Ceci dit, étant donné une paire quelconque $\{a, b\}$ de sommets distincts de G , considérons les deux graphes $G' = G_{a,b}$ et $G'' = G_{b,a}$. On a

$$\begin{aligned} & [|\Gamma_{G'} c| + |\Gamma_{G'}^{\bar{c}} c|] + [|\Gamma_{G''} c| + |\Gamma_{G''}^{\bar{c}} c|] \\ & \geq [|\Gamma_G a| - 1] + [|\Gamma_G b| - 1] + [|\Gamma_G b| - 1] + [|\Gamma_G a| - 1] \geq 2[|\Gamma_G| - 1]. \end{aligned}$$

Il en résulte que l'une au moins des deux inégalités suivantes :

$$|\Gamma_{G'} c| + |\Gamma_{G'}^{\bar{c}} c| \geq |\Gamma_G|, \quad |\Gamma_{G''} c| + |\Gamma_{G''}^{\bar{c}} c| \geq |\Gamma_G|$$

est vérifiée, et par conséquent, d'après le théorème 5, que l'un au moins des deux graphes G' et G'' possède un circuit hamiltonien.

C. Q. F. D.

Nous allons voir maintenant qu'on ne peut renforcer l'énoncé du théorème 7 :

— ni en remplaçant la condition que G est fortement 2-connexe par la condition que G est fortement connexe;

— ni en allégeant la condition imposée aux demi-degrés.

Contre-exemple 4. — Considérons d'abord le graphe donné comme contre-exemple 1 au paragraphe précédent, et remarquons que dans ce graphe tout chemin hamiltonien commence dans X_1 et finit dans X_2 . Cela va nous mettre sur la voie du contre-exemple que nous voulons construire ici. En effet, soit p un entier quelconque ≥ 2 , et soient X_1, X_2, X_3 trois

⁽²²⁾ Il n'est pas possible de passer facilement du théorème 1 au théorème 2. De ce point de vue, le théorème 5 introduit une certaine unité.

ensembles disjoints ayant chacun p éléments. Soit G le graphe (voir *fig. 12*) défini par

$$X_G = X_1 \cup X_2 \cup X_3$$

et

$$y \in \Gamma_G x \iff \begin{cases} x \in X_1 \\ \text{ou } x \in X_2 \text{ et } y \in X_2 \cup X_3, \text{ et } y \neq x \\ \text{ou } x \in X_3 \text{ et } y \in X_3. \end{cases}$$

Soit b un élément quelconque de X_2 : il n'y a dans G aucun chemin hamiltonien commençant ou finissant en b . Soit maintenant G' le graphe obtenu en ajoutant à G un sommet a et, pour chaque sommet $x \in X_G$, deux arcs opposés (a, b) et (x, a) . Il est évident qu'il n'y a pas dans G' de chemin hamiltonien ayant a et b pour extrémités. Et cependant G' est fortement connexe, et la somme des deux demi-degrés en chacun de ses sommets est supérieure ou égale à $|X_{G'}| + 1$.

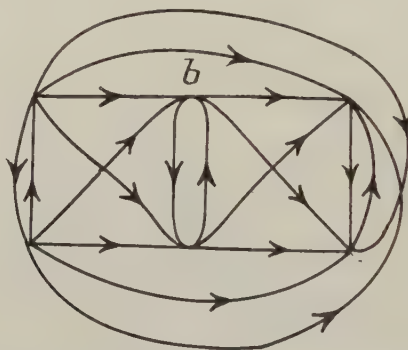


Fig. 12.

Contre-exemple 5. — Considérons le graphe G_k défini dans le contre-exemple 2, et soit G' le graphe obtenu en remplaçant le sommet O par deux sommets a et b reliés entre eux et à tous les autres sommets par deux arcs opposés. Ce graphe est fortement 2-connexe, et la somme des demi-degrés est supérieure à $|X_{G'}|$ en tout sommet autre que k et $k+1$, égale à $|X_{G'}|$ aux sommets k et $k+1$. Cependant G' n'admet pas de chemin hamiltonien ayant a et b pour extrémités; car si cela était, G_k admettrait un circuit hamiltonien.

4. CIRCUITS DE LONGUEUR SUPÉRIEURE A UN NOMBRE DONNÉ (Contre-exemple). — Pour tenter d'étendre les théorèmes 3 et 4 au cas des graphes orientés, on est conduit à envisager des énoncés qui seraient en gros les suivants :

Énoncé 1. — « Si un graphe orienté fortement 2-connexe sans boucles G vérifie

$$|\Gamma_G x| + |\Gamma_G^- x| \geq d \quad \text{quel que soit } x \in X_G, \quad \text{avec } d \leq |X_G|,$$

alors il existe dans G un circuit élémentaire de longueur supérieure ou égale à d . »

Énoncé 2. — « Si un graphe orienté (fortement 2-connexe) sans boucles G vérifie

$$|U_G| > l[|X_G| - 1],$$

alors il existe dans G un circuit élémentaire de longueur supérieure à l . »

Or ces énoncés sont largement infirmés par le contre-exemple suivant :

Contre-exemple 6. — Soient A , X_1 et X_2 trois ensembles disjoints avec

$$|A| = 2, \quad |X_1| = |X_2| = p'.$$

Considérons le graphe G défini par

$$X_G = A \cup X_1 \cup X_2$$

et

$$y \in \Gamma_G x \iff x \in A \text{ ou } y \in A \text{ ou } (x \in X_1 \text{ et } y \in X_2) \text{ et } y \neq x.$$

G est fortement 2-connexe, et il a $2p + 2$ sommets. On a

$$|\Gamma_G x| + |\Gamma_G^- x| \geq p + 4 \quad \text{quel que soit } x \in X_G,$$

et

$$|U_G| = p^2 + 8p + 2 > \frac{p}{2} |X_G|.$$

Cependant, aussi grand que soit p , G n'admet pas de circuits de longueur supérieure à 6.

CHAPITRE VI.

DEUX THÉORÈMES COMBINATOIRES.

1. GRAPHES DE COMPARABILITÉ. — Étant donné une relation d'ordre, qui sera notée $\leq$, définie sur un ensemble fini X , il est possible de lui associer le graphe orienté G défini par

$$X_G = X \quad \text{et} \quad y \in \Gamma_G x \iff x < y.$$

La propriété caractéristique des graphes ainsi définis est d'être transitifs, c'est-à-dire de vérifier

$$y \in \Gamma_G x \quad \text{et} \quad z \in \Gamma_G y \Rightarrow z \in \Gamma_G x.$$

Or les graphes transitifs ont un certain nombre de propriétés intéressantes qui ne font pas intervenir l'orientation des arêtes : en particulier, dans un graphe transitif G on a

$$\gamma(G) = \omega(G) \quad \text{et} \quad \theta(G) = \alpha(G),$$

en appelant $\gamma(G)$ le nombre chromatique, $\alpha(G)$ le nombre de stabilité interne, $\omega(G)$ le nombre maximal d'éléments d'une clique, et $\theta(G)$ le nombre minimal d'éléments d'une partition de X_G en cliques.

Il paraît donc intéressant, étant donné une relation d'ordre, notée $\leq$, définie sur un ensemble fini X , de lui associer le graphe non orienté G défini par

$$X_G = X \quad \text{et} \quad \{x, y\} \in U_G \iff (x < y \text{ ou } y < x).$$

Un tel graphe s'appellera un *graphe de comparabilité*. Le problème se pose de pouvoir caractériser simplement les graphes de comparabilité. A. J. Hoffman a énoncé à cet égard une conjecture, qui a été démontrée quelque temps après, simultanément et indépendamment, par lui-même et par l'auteur de cette thèse ([14], [15]). Nous donnons ici notre démonstration, qui ne s'applique qu'au cas fini, mais qui a l'avantage d'être extrêmement rapide.

THÉORÈME. — *Étant donné un graphe non orienté sans boucles G associons-lui le graphe non orienté $\bar{G}$ défini par*

$$x \in X_{\bar{G}} \iff x = (a, b) \quad \text{et} \quad \{a, b\} \in U_G$$

et

$$\{x, y\} \in U_{\bar{G}} \iff x = (a, b), y = (b, c) \quad \text{et} \quad \{a, c\} \notin U_G.$$

Pour que G soit un graphe de comparabilité, il faut et il suffit que $\bar{G}$ soit bichromatique.

On appellera *orientation* de G un ensemble $V \subset X_G \times X_G$ vérifiant

$$(a, b) \in V \implies (b, a) \notin V$$

et

$$\{a, b\} \in U_G \iff (a, b) \in V \text{ ou } (b, a) \in V.$$

Nous dirons qu'une orientation V est *transitive* si elle vérifie

$$(a, b) \in V \text{ et } (b, c) \in V \implies (a, c) \in V;$$

qu'elle est *quasi-transitive* si elle vérifie

$$(a, b) \in V \text{ et } (b, c) \in V \implies \{a, c\} \in U_G.$$

Toute orientation transitive est quasi-transitive. D'autre part, il est évident que G est un graphe de comparabilité si et seulement si il possède au moins une orientation transitive.

Enfin remarquons que pour que $\bar{G}$ soit bichromatique, il faut et il suffit qu'il existe un ensemble $V \subset X_G \times X_G$ tel que

$$V \subset X_{\bar{G}},$$

$$x, y \in V \implies \{x, y\} \notin U_{\bar{G}}$$

$$x, y \in X_{\bar{G}} - V \implies \{x, y\} \notin U_{\bar{G}}.$$

Or pour que V vérifie toutes ces conditions, il faut et il suffit que ce soit une orientation quasi-transitive de G .

Étant donné ce qui précède, la démonstration du théorème sera achevée lorsque nous aurons démontré le lemme suivant :

LEMME. — *S'il existe une orientation quasi-transitive de G , il existe également une orientation transitive de G .*

Nous allons supposer que ce lemme est vrai pour $|X_G| < n$, et considérer un graphe non orienté G ayant n sommets et possédant une orientation quasi-transitive V .

Remarquons d'abord que si trois sommets distincts a , b et c vérifient

$$(a, b) \in V, \quad (b, c) \in V \quad \text{et} \quad (c, a) \in V,$$

tout autre sommet de G est relié à 0, 2 ou 3 de ces sommets. Ceci dit, si l'orientation V n'est pas transitive, il existe trois sommets x_1, x_2, x_3 vérifiant

$$(x_1, x_2) \in V, \quad (x_2, x_3) \in V \quad \text{et} \quad (x_3, x_1) \in V.$$

Deux cas se présentent alors.

Premier cas. — Tout sommet autre que x_1, x_2, x_3 qui est relié à l'un de ces trois sommets est relié aux trois. Supprimons alors x_2 et x_3 , et donnons une orientation transitive au sous-graphe obtenu (cela est possible, d'après l'hypothèse de récurrence).

Si nous orientons ensuite chaque arête de la forme $\{x, x_2\}$ ou $\{x, x_1\}$, x étant différent de x_1, x_2, x_3 , de la même façon que $\{x, x_1\}$, et si nous orientons de manière transitive le triangle formé par x_1, x_2, x_3 , nous obtenons finalement une orientation transitive de G .

Deuxième cas. — Il existe au moins un sommet x_0 différent de x_1, x_2, x_3 relié à deux de ces sommets, par exemple à x_2 et x_3 , mais pas au troisième. Soit A l'ensemble des sommets x différents de x_2 et x_3 qui vérifient

$$(x, x_2) \in V \quad \text{et} \quad (x_3, x) \in V.$$

On a $x_1 \in A$; et, d'autre part, comme x_0 n'est pas relié à x_1 , on a nécessairement $x_0 \in A$. Nous allons voir maintenant que si x est un sommet qui n'appartient pas à A , alors ou bien x est relié à tous les sommets de A , ou bien x n'est relié à aucun sommet de A . En effet, soient $a, b \in A$, et supposons que x soit relié à a , mais pas à b : en considérant le triangle formé par a, x_2 et x_3 , on voit que x est relié à deux au moins de ces trois sommets, donc à l'un au moins des sommets x_2 et x_3 ; en considérant ensuite le triangle formé par b, x_2 et x_3 , on voit que x est nécessairement relié à x_2 et x_3 , et qu'on a plus précisément $(x, x_2) \in V$ et $(x_3, x) \in V$; mais cela est absurde, puisque $x \notin A$.

Il suffit maintenant d'orienter de manière transitive, d'une part le sous-graphe de G engendré par A , d'autre part le sous-graphe obtenu en

supprimant dans G les sommets de A autres que x_1 (cela est possible d'après l'hypothèse de récurrence), et d'orienter toute arête de la forme $\{x, y\}$ avec $x \notin A$ et $y \in A$ de la même manière que $\{x, x_1\}$, pour obtenir une orientation transitive de G . C. Q. F. D.

Il existe une autre manière d'énoncer le théorème précédent.

COROLLAIRE. — *Pour qu'un graphe non orienté sans boucles G soit un graphe de comparabilité, il faut et il suffit que, pour toute séquence impaire de sommets $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2q}$ vérifiant*

$$\{x_i, x_{i+1}\} \in U_G \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, \dots, 2q$$

(en convenant que l'addition entre indice se fait modulo $2q + 1$) il existe au moins un indice i ($i = 0, 1, 2, \dots, 2q$) tel que

$$\{x_i, x_{i+2}\} \in U_G.$$

En effet, pour que G soit bichromatique, il faut et il suffit que tous ses cycles soient de longueur paire.

2. A PROPOS D'UN LEMME COMBINATOIRE. — Étant donné deux graphes G et G' (orientés ou non), on appelle *application préservante* de G dans G' toute application de X_G dans $X_{G'}$ qui est telle que les images de deux sommets adjacents quelconques sont deux sommets adjacents ou confondus.

PROPOSITION 1. — *Si σ est une application préservante de G dans G' et si σ' est une application préservante de G' dans G'' , le produit de composition $\sigma' \circ \sigma$ est une application préservante de G dans G'' .*

PROPOSITION 2. — *Soient G et G' deux graphes ayant même nombre de sommets et même nombre d'arêtes; et soit σ une application préservante de G dans G' . Si σ est biunivoque, l'application inverse σ^{-1} est préservante.*

En effet, l'application $\bar{\sigma}$ de U_G dans $U_{G'}$ définie par

$$\bar{\sigma}\{x, y\} = \{\sigma(x), \sigma(y)\}$$

est injective. Or on a $|U_G| = |U_{G'}|$. Il en résulte que $\bar{\sigma}$ est bijective. On a donc bien

$$\{x, y\} \in U_{G'} \Rightarrow \{\sigma^{-1}(x), \sigma^{-1}(y)\} \in U_G.$$

Nous allons étudier les applications préservantes pour un type de graphes très particulier.

DÉFINITION. — Étant donné un ensemble fini I , nous appellerons *graphe simplicial* de I le graphe orienté $G = G(I)$ défini par

$$X_G = \mathcal{X}(I)$$

et

$$B \in \Gamma_G A \Leftrightarrow B \supset A \text{ et } |B| = |A| + 1.$$

PROPOSITION 3. — Si σ est une application préservante de $G(I)$ dans $G(I')$, alors on a

$$|\sigma(A) \dot{+} \sigma(B)| \leq |A \dot{+} B| \quad \text{quels que soient } A, B \subset I.$$

PROPOSITION 4. — Soient I et I' deux ensembles finis ayant même nombre d'éléments, et soit σ une application préservante de $G(I)$ dans $G(I')$ vérifiant $\sigma(\emptyset) = \emptyset$. S'il existe un ensemble $A_0 \subset I$ tel que $\sigma(A_0) = I'$, alors on a $A_0 = I$, et

$$|\sigma(A)| = |A| \quad \text{quel que soit } A \subset I.$$

On a, en effet,

$$|I| = |I'| = |\sigma(A_0) \dot{+} \sigma(\emptyset)| \leq |A_0 \dot{+} \emptyset| = |A_0|,$$

d'où nécessairement $A_0 = I$.

D'autre part, quel que soit $A \subset I$, on a

$$|\sigma(A)| = |\sigma(A) \dot{+} \sigma(\emptyset)| \leq |A \dot{+} \emptyset| = |A|$$

et

$$|I| - |\sigma(A)| = |\sigma(A) \dot{+} \sigma(I)| \leq |A \dot{+} I| = |I| - |A|,$$

ce qui entraîne $|\sigma(A)| = |A|$.

PROPOSITION 5. — Soient I et I' deux ensembles finis ayant chacun n éléments. Si une application préservante σ de $G(I)$ dans $G(I')$ vérifie $\sigma(\emptyset) = \emptyset$ et $\sigma(I) = I'$, alors pour tout chemin $[A_0, A_1, \dots, A_n]$ allant de $A_0 = \emptyset$ à $A_n = I$ dans $G(I)$, les images $\sigma(A_0) = \emptyset, \sigma(A_1), \dots, \sigma(A_n) = I'$ constituent un chemin de $G(I')$.

En effet, on a

$$|\sigma(A_{k+1})| = |\sigma(A_k)| + 1 \quad \text{pour } k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Comme $\sigma(A_k)$ et $\sigma(A_{k+1})$ sont adjacents dans G' , on a nécessairement

$$\sigma(A_{k+1}) \in \Gamma_G \sigma(A_k) \quad \text{pour } k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

COROLLAIRE. — Soient I et I' deux ensembles finis ayant même nombre d'éléments. Si une application préservante σ de $G(I)$ dans $G(I')$ vérifie $\sigma(\emptyset) = \emptyset$ et $\sigma(I) = I'$, alors on a

$$A \subset B \Rightarrow \sigma(A) \subset \sigma(B).$$

PROPOSITION 6. — Soient I et I' deux ensembles finis et soit σ une application préservante de $G = G(I)$ dans $G' = G(I')$ vérifiant $\sigma(\emptyset) = \emptyset$ et $\sigma(I) = I'$. Pour que σ soit biunivoque, il faut et il suffit que sa restriction à $\Gamma_G(\emptyset)$ soit une application biunivoque de $\Gamma_G(\emptyset)$ sur $\Gamma_{G'}(\emptyset)$.

Si σ est biunivoque, on a nécessairement $|I| = |I'|$ et, d'autre part, d'après la proposition 4, l'image de tout élément de $\Gamma_G(\emptyset)$ est un élément de $\Gamma_{G'}(\emptyset)$.

Inversement, supposons que la restriction de σ à $\Gamma_G(\emptyset)$ soit une bijection de $\Gamma_G(\emptyset)$ sur $\Gamma_{G'}(\emptyset)$. On a d'abord évidemment

$$|\Gamma_G(\emptyset)| = |\Gamma_{G'}(\emptyset)| = |I|.$$

D'autre part, quel que soit $A \subset I$, $\sigma(A)$ contient la réunion des images des parties à un élément de A . Comme ces images sont toutes distinctes, ont chacune un élément, et qu'il y en a donc $|A| = |\sigma(A)|$, il en résulte que $\sigma(A)$ est égale précisément à la réunion des images des parties à un élément de A . On en déduit immédiatement que σ est biunivoque.

THÉORÈME 1. — *Soient I et I' deux ensembles finis ayant chacun n éléments, et soit σ une application préservante de $G = G(I)$ dans $G' = G(I')$ vérifiant $\sigma(\emptyset) = \emptyset$. Le nombre de chemins de G allant de $\emptyset$ à I qui ont pour image un chemin donné quelconque de G' allant de $\emptyset$ à I' est égal à 1 si σ est biunivoque; il est pair si σ n'est pas biunivoque.*

Soit $[A_0, A_1, \dots, A_n]$ un chemin de $G(I')$ allant de $A_0 = \emptyset$ à $A_n = I'$. Si σ est biunivoque, $[\sigma^{-1}(A_0), \sigma^{-1}(A_1), \dots, \sigma^{-1}(A_n)]$ est, d'après les propositions 2, 4 et 5, un chemin de $G(I)$ allant de $\emptyset$ à I qui a pour image le chemin donné, et c'est évidemment le seul.

Considérons maintenant l'ensemble $J \subset \Gamma_G(\emptyset)$ défini par

$$J = \{A/A \in X_G \text{ et } \sigma(A) = A_1\}$$

et l'ensemble $K \subset J$ des éléments $B \in J$ qui vérifient

$$B_1, B_2 \in \Gamma_G(\emptyset), \quad B_1 \neq B_2 \quad \text{et} \quad B_1, B_2 \neq B \Rightarrow \sigma(B \cup B_1) \neq \sigma(B \cup B_2).$$

LEMME. — *Si σ n'est pas biunivoque, et si $\sigma(I) = I'$, alors on a*

$$|K| = 0 \quad \text{ou} \quad 2.$$

En effet, supposons $K \neq \emptyset$, et soit B_1 un élément de K .

1° L'ensemble J contient au moins un élément autre que B_1 . En effet, σ n'étant pas biunivoque, il existe dans $\Gamma_G(\emptyset)$, d'après la proposition 6, deux éléments distincts B_2 et B_3 qui ont même image. Si J ne contenait que l'élément B_1 , on aurait

$$\sigma(B_2) = \sigma(B_3) \neq \sigma(B_1) = A_1,$$

d'où nécessairement

$$\sigma(B_1 \cup B_2) = A_1 \cup \sigma(B_2) = A_1 \cup \sigma(B_3) = \sigma(B_1 \cup B_3),$$

ce qui est impossible puisque $B_1 \in K$.

2° La relation binaire ρ définie dans $J = \{B_1\}$ par

$$B \rho B' \Leftrightarrow B = B' \quad \text{ou} \quad \sigma(B \cup B') = \sigma(B_1 \cup B')$$

est une relation d'ordre total.

En effet, soient $B, B' \in J$ avec $B \neq B'$ et $B, B' \neq B_1$. Considérons les trois ensembles $\sigma(B_1 \cup B)$, $\sigma(B_1 \cup B')$ et $\sigma(B \cup B')$. Ils sont contenus dans $\sigma(B_1 \cup B \cup B')$ et ils contiennent A_1 . Comme les deux premiers sont nécessairement différents, puisque $B_1 \in K$, l'un d'eux est égal au troisième, et pas l'autre. On voit ainsi qu'une et une seule des deux relations $B \rho B'$ et $B' \rho B$ est vérifiée.

Soient maintenant B, B', B'' trois éléments distincts de J , différents, de B_1 , vérifiant $B \rho B'$ et $B' \rho B''$. Les trois ensembles $\sigma(B \cup B')$, $\sigma(B' \cup B'')$ et $\sigma(B \cup B'')$ contiennent A_1 et sont contenus dans $\sigma(B \cup B' \cup B'')$. Or les deux premiers, égaux respectivement à $\sigma(B_1 \cup B')$ et $\sigma(B_1 \cup B'')$, sont différents, et ils sont contenus dans $\sigma(B_1 \cup B' \cup B'')$. On a ainsi

$$\sigma(B \cup B'') \subset \sigma(B \cup B' \cup B'') = \sigma(B_1 \cup B' \cup B'').$$

Ceci dit, l'ensemble $\sigma(B_1 \cup B)$, qui contient A_1 , ne peut être contenu dans $\sigma(B_1 \cup B' \cup B'')$; car s'il l'était, il serait égal à l'un des deux ensembles $\sigma(B_1 \cup B')$ et $\sigma(B_1 \cup B'')$. Or il est contenu dans $\sigma(B_1 \cup B \cup B'')$. Il en résulte que les deux ensembles $\sigma(B_1 \cup B' \cup B'')$ et $\sigma(B_1 \cup B \cup B'')$ sont différents. Comme ils contiennent tous les deux à la fois $\sigma(B \cup B'')$ et $\sigma(B_1 \cup B'')$, on a $\sigma(B \cup B'') = \sigma(B_1 \cup B'')$, c'est-à-dire $B \rho B''$.

3° La relation ρ étant une relation d'ordre total, il existe dans J un élément B_2 différent de B_1 pour lequel on a

$$B \in J \quad \text{et} \quad B \neq B_1, B_2 \Rightarrow B_2 \rho B \Rightarrow \sigma(B_2 \cup B) = \sigma(B_1 \cup B).$$

On a évidemment

$$B \in J \quad \text{et} \quad B \neq B_1, B_2 \Rightarrow B \notin K.$$

D'autre part, si B est un élément quelconque de $\Gamma_G(\emptyset) - J$, on a

$$\sigma(B \cup B_2) = \sigma(B) \cup A_1 = \sigma(B \cup B_1).$$

Soient B' et B'' deux éléments de $\Gamma_G(\emptyset)$ différents de B_2 ; si l'un de ces éléments, par exemple B' , est égal à B_1 , on a

$$\sigma(B_2 \cup B') = \sigma(B_2 \cup B_1) \neq \sigma(B'' \cup B_1) = \sigma(B'' \cup B_2);$$

si, au contraire, B' et B'' sont différents de B_1 , on a

$$\sigma(B_2 \cup B') = \sigma(B_1 \cup B') \neq \sigma(B_1 \cup B'') = \sigma(B_2 \cup B'').$$

On a donc $B_2 \in K$. Le lemme est ainsi démontré.

Nous allons maintenant démontrer, par récurrence sur $|I|$, que si σ n'est pas biunivoque, le nombre de chemins de G qui ont pour image le chemin $[A_0, A_1, \dots, A_n]$ est pair. Remarquons d'abord que ce nombre est nul si $\sigma(I) \neq I'$, et cela d'après la proposition 4; nous supposons donc $\sigma(I) = I'$.

Soit B_1 un élément quelconque de J . Considérons les ensembles à $n-1$ éléments $I_1 = I - B_1$ et $I'_1 = I' - A_1$, et soit σ_1 l'application de $G(I_1)$ dans $G(I'_1)$ définie par

$$\sigma_1(B) = \sigma(B_1 \cup B) - A_1 \quad \text{pour } B \subset I_1.$$

Cette application est préservante; car si B et B' sont deux sommets adjacents de $G(I_1)$, $\sigma(B_1 \cup B)$ et $\sigma(B_1 \cup B')$ sont deux sommets adjacents de $G(I')$, et comme ces deux ensembles contiennent $\sigma(B_1) = A_1$, il en résulte que $\sigma_1(B)$ et $\sigma_1(B')$ sont adjacents dans $G(I'_1)$. D'autre part, on a

$$\sigma_1(\emptyset) = \emptyset \quad \text{et} \quad \sigma_1(I_1) = I'_1.$$

D'après la proposition 6, il faut et il suffit, pour que σ_1 soit biunivoque, qu'on ait

$$B, B' \in \Gamma_1(\emptyset), \quad B \neq B' \quad \text{et} \quad B, B' \neq B_1 \Rightarrow \sigma_1(B) \neq \sigma_1(B'),$$

c'est-à-dire $B_1 \in K$.

Soient maintenant $n+1$ sommets de G , $B_0, B_1, \dots, B_n$, avec $B_0 = \emptyset$ et $B_n = I$. Pour qu'ils constituent un chemin de G ayant pour image le chemin donné, il faut et il suffit qu'on ait $B_i \in J$, et que les n ensembles

$$B'_0 = \emptyset, \quad B'_1 = B_2 - B_1, \quad B'_2 = B_3 - B_1, \quad \dots, \quad B'_{n-1} = B_n - B_1 = I_1,$$

constituent un chemin de $G(I_1)$ ayant pour image dans $G(I'_1)$, par l'application σ_1 , le chemin $[A'_0, A'_1, A'_2, \dots, A'_{n-1}]$ avec

$$A'_0 = \emptyset, \quad A'_1 = A_2 - A_1, \quad A'_2 = A_3 - A_1, \quad \dots, \quad A'_{n-1} = A_n - A_1 = I'_1.$$

Or, B_1 étant fixé, appartenant à J , le nombre de ces chemins est pair, d'après l'hypothèse de récurrence, si σ_1 n'est pas biunivoque, c'est-à-dire si $B_1 \notin K$; et il est égal à 1 si $B_1 \in K$. Comme nous savons que K a un nombre pair d'éléments, le théorème est démontré.

C. Q. F. D.

DÉFINITION. — Soit un entier positif n , et soit l'ensemble $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Considérons le graphe $G_n = G(I_n)$, et soit φ l'application de X_{G_n} dans $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ définie par

$$\varphi(A) = \text{le plus grand entier appartenant à } A, \text{ si } A \neq \emptyset;$$

$$\varphi(\emptyset) = 0.$$

On dit qu'un ensemble S de sommets de G_n est *complet* si S comprend $n+1$ éléments, et si l'on a

$$A, B \in S \quad \text{et} \quad A \neq B \Rightarrow \varphi(A) \neq \varphi(B).$$

PROPOSITION 7. — *Quel que soit $A_0 \subset I_n$, il existe une et une seule chaîne élémentaire dont les sommets constituent un ensemble complet, et ayant A_0 pour l'une de ses extrémités; et l'autre extrémité de cette chaîne est le complémentaire de A_0 dans I_n .*

Nous allons raisonner par récurrence sur n . Remarquons d'abord que si $[A_0, A_1, \dots, A_n]$ est une chaîne complète (c'est-à-dire une chaîne élémentaire dont les sommets constituent un ensemble complet), il existe un indice i et un seul ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) vérifiant $\varphi(A_i) = n$, c'est-à-dire $n \in A_i$, et cet indice ne peut être que 0 ou n ; car si l'on avait

$$n \in A_i, \quad \text{avec } 0 < i < n,$$

on aurait nécessairement

$$A_{i-1} = A_i \dot{+} \{n\} = A_{i+1},$$

ce qui est absurde. Nous pouvons maintenant distinguer deux cas.

Premier cas : $n \in A_0$. — Pour que $[A_0, A_1, \dots, A_n]$ soit une chaîne complète de G_n , il faut et il suffit que $[A_1, A_2, \dots, A_n]$ soit une chaîne complète de G_{n-1} , et qu'on ait $A_1 = A_0 \dot{+} \{n\}$.

Deuxième cas : $n \notin A_0$. — Pour que $[A_0, A_1, \dots, A_n]$ soit une chaîne complète de G_n , il faut et il suffit que $[A_0, A_1, \dots, A_{n-1}]$ soit une chaîne complète de G_{n-1} , et qu'on ait $A_n = A_{n-1} \dot{+} \{n\}$.

Dans les deux cas, on voit, d'après l'hypothèse de récurrence, qu'il existe une chaîne complète et une seule ayant A_0 pour extrémité, et que l'autre extrémité de cette chaîne est le complémentaire de A_0 dans I_n .

THÉORÈME 2. — *Soit I un ensemble fini ayant n éléments, et soit σ une application préservante de $G(I)$ dans $G(I_n)$. Le nombre de chemins de $G(I)$ allant de $\emptyset$ à I et ayant pour image un ensemble complet de $G(I_n)$ est pair si σ n'est pas biunivoque, égal à 1 si σ est biunivoque.*

En effet, soit $[A_0, A_1, \dots, A_n]$ la chaîne complète ayant $A_0 = \sigma(\emptyset)$ pour extrémité, et soit σ' l'application préservante de $G(I)$ dans $G(I_n)$ définie par

$$\sigma'(A) = A_0 \dot{+} \sigma(A).$$

Les ensembles $A'_0, A'_1, \dots, A'_n$ définis par

$$A'_i = A_i \dot{+} A_0 \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, \dots, n$$

constituent une chaîne de longueur n ayant $\emptyset$ et I_n pour extrémités; cette chaîne est nécessairement un chemin allant de $\emptyset$ à I_n . Or, pour qu'un chemin de $G(I)$ allant de $\emptyset$ à I ait pour image par σ un ensemble complet, il faut et il suffit que son image par σ' soit le chemin $[A'_0, A'_1, \dots, A'_n]$. On se trouve donc ramené au théorème 1. C. Q. F. D.

Étant donné des entiers $p_1, p_2, \dots, p_n \geq 2$, considérons dans R^n l'ensemble E des points $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ à coordonnées entières qui vérifient

$$0 \leq x_i \leq p_i \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n.$$

Soit G le graphe défini par $X_G = E$, et

$$y \in \Gamma_G x \iff \left\{ \begin{array}{l} y_i - x_i \geq 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n \\ \text{et} \quad \sum_{i=1}^n (y_i - x_i) = 1. \end{array} \right.$$

Si a est un point de E vérifiant

$$0 \leq a_i < p_i \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n,$$

nous appellerons « petit cube » issu de a le sous-graphe G_a engendré par les points $x \in E$ qui vérifient

$$0 \leq x_i - a_i \leq 1 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n.$$

Nous appellerons « chemin cubique » tout chemin de longueur n contenu dans un petit cube.

Tout petit cube G_a est isomorphe au graphe $G_n = G(I^n)$ défini plus haut; en effet, l'application qui fait correspondre à tout sommet x de G_a le sommet A de G_n défini par

$$A = \{ i / i \in I_n \text{ et } x_i - a_i = 1 \}$$

établit un isomorphisme entre les deux graphes. Dans cet isomorphisme, il correspond à tout chemin cubique contenu dans G_a un chemin de G_n allant de $\emptyset$ à I_n , et réciproquement.

Considérons maintenant une application σ de E dans X_{G_n} qui vérifie

$$\begin{aligned} x_i = 0 &\Rightarrow i \notin \sigma(x), \\ x_i = p_i &\Rightarrow i \in \sigma(x). \end{aligned}$$

Dans un article consacré à des lemmes combinatoires qui interviennent en topologie [21], H. Kuhn démontre que *le nombre de chemins cubiques qui ont pour image un ensemble complet de G_n est impair* (Cubical Sperner Lemma). D'autre part, il cite un lemme de Ky-Fan selon lequel *si σ est une application préservante, le nombre de petits cubes qui ont pour image l'ensemble X_{G_n} tout entier est impair*. Et H. Kuhn se demande s'il existe un lien entre ces deux lemmes. Le lien apparaît maintenant comme évident : en effet, σ étant préservante, le nombre de chemins cubiques contenus dans un petit cube donné et ayant pour image un ensemble complet de G_n est, d'après le théorème 2, impair ou pair suivant que la restriction de σ aux sommets de ce petit cube est ou n'est pas biunivoque; à partir de là, le second lemme découle immédiatement du premier.

BIBLIOGRAPHIE.

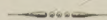
- [1] C. BERGE, *Théorie des graphes et ses applications*, Dunod, Paris, 1958.
- [2] C. BERGE, *Problèmes de transport et de potentiel*, in *Programmes, jeux et réseaux de transport*, par C. BERGE et A. GHOUILA-HOURI, Dunod, Paris, 1962, p. 117-252.
- [3] C. BERGE, *Ensembles couvrants et dispersifs dans un graphe simple* (Séminaire sur les problèmes combinatoires, Paris, janvier 1962).
- [4] N. BOURBAKI, *Algèbre*, livre II.
- [5] P. CAMION, *Quelques propriétés des chemins et des circuits hamiltoniens dans la théorie des graphes* (Cahiers du Centre d'Études de Rech. Opér., Bruxelles, t. 2, 1960, p. 10).
- [6] G. A. DIRAC, *Some theorems on abstract graphs* (Proc. Lond. Math. Soc., t. 2, 1952, p. 69-81).
- [7] P. DUBREIL et M.-L. DUBREIL-JACOTIN, *Leçons d'algèbre moderne*, Dunod, Paris, 1962.
- [8] P. ERDÖS et T. GALLAI, *On maximal paths and circuits of graphs* (Acta Math. Ac. Sc. Hung., t. 10, 1959, p. 337-356).
- [9] T. GALLAI, *Ueber reguläre Kettengruppen* (Acta Math. Ac. Sc. Hung., t. 10, 1959, p. 227-240).
- [10] A. GHOUILA-HOURI, *Sur l'existence d'un flot ou d'une tension prenant ses valeurs dans un groupe abélien* (C. R. Acad. Sc., t. 250, 1960, p. 3931).
- [11] A. GHOUILA-HOURI, *Diamètre maximal d'un graphe fortement connexe* (C. R. Acad. Sc., t. 250, 1960, p. 4254).
- [12] A. GHOUILA-HOURI, *Une condition suffisante d'existence d'un circuit hamiltonien* (C. R. Acad. Sc., t. 251, 1960, p. 494).
- [13] A. GHOUILA-HOURI, *Caractérisation des matrices totalement unimodulaires* (C. R. Acad. Sc., t. 254, 1962, p. 1192).
- [14] A. GHOUILA-HOURI, *Caractérisation des graphes non orientés dont on peut orienter les arêtes de manière à obtenir le graphe d'une relation d'ordre* (C. R. Acad. Sc., t. 254, 1962, p. 1370).
- [15] P. C. GILMORE et A. J. HOFFMAN, *A characterization of comparability graphs and of interval graphs* (non publié).
- [16] I. HELLER, cité dans [1], p. 141.
- [17] I. HELLER et C. B. TOMPKINS, *An extension of a theorem of Dantzig* (Ann. Math. Studies, t. 38, 1956, p. 247-254).
- [18] A. J. HOFFMAN, cité dans [1], p. 80.
- [19] A. J. HOFFMAN et J. G. KRUSKAL, *Integral boundary points of convex polyhedra* (Ann. Math. Studies, t. 38, 1956, p. 223-246).
- [20] K. KURATOWSKI, *Sur le problème des courbes gauches en topologie* (Fund. Math., t. 15, 1930, p. 271-283).
- [21] H. KUHN, *Some combinatorial lemmas in topology* (I. B. M. J. Res. and Devel., t. 4, 1960, p. 518-524).
- [22] A. LICHNEROWICZ, *Algèbre et Analyse linéaires*, Paris, 1956.
- [23] S. MAC LANE, *A combinatorial condition for planar graphs* (Fund. Math., t. 28, 1937, p. 22-32).
- [24] S. MAC LANE, *A structural characterization of planar combinatorial graphs* (Duke Math. J., t. 3, 1937, p. 460-472).
- [25] G. J. MINTY, *Monotone networks* (Proc. Roy. Soc., A, t. 257, 1960, p. 194).
- [26] O. ORE, *Theory of graphs*, 1962, A. M. S.
- [27] L. POSA, *A theorem concerning Hamilton lines* (Public. Math. Inst. of the Hungarian Acad. Sc., t. 7, 1962, p. 225-226).
- [28] B. ROY, *Cheminement et connexité dans les graphes, application aux problèmes d'ordonnancement* (Thèse, Paris, 1962).
- [29] W. T. TUTTE, *A class of abelian group* (Can. J. Math., t. 8, 1956, p. 13-28).

- [30] W. T. TUTTE, *A homotopy theorem for matroids. I* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 88, 1958, p. 144-160).
 - [31] W. T. TUTTE, *A homotopy theorem for matroids. II* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 88, 1958, p. 161-174).
 - [32] W. T. TUTTE, *Matroids and Graphs* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 90, 1959, p. 527-552).
 - [33] H. WHITNEY, *The abstract properties of linear dependence* (*Amer. J. Math.*, t. 57, 1935, p. 507-553).
 - [34] H. WHITNEY, *Congruent graphs and the connectivity of graphs* (*Amer. J. Math.*, t. 54, 1932, p. 150-168).
 - [35] H. WHITNEY, *Non separable and planar graphs* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 34, 1932, p. 339-362).
 - [36] H. WHITNEY, *Planar graphs* (*Fund. Math.*, t. 21, 1933, p. 73-84)
-

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages
INTRODUCTION.....	267
CHAPITRE I. — <i>Conditions de compatibilité :</i>	
1. Rappels de définitions.....	269
2. Familles distributives.....	272
3. Ensembles représentatifs.....	273
4. Conditions de compatibilité.....	274
CHAPITRE II. — <i>Sous-groupes réguliers :</i>	
1. Sous-modules réguliers.....	278
2. Espace vectoriel $\mathcal{L}$ (I).....	281
3. Sous-groupes réguliers.....	282
4. Éléments positifs d'un sous-groupe régulier.....	290
CHAPITRE III. — <i>Cycles et cocycles :</i>	
1. Multigraphes non orientés.....	293
2. Isomorphismes. Étrécissement et suppression. Pivotement.....	295
3. Groupes cocycliques.....	301
4. Multigraphes planaires.....	309
CHAPITRE IV. — <i>Flots et tensions.</i>	311
CHAPITRE V. — <i>Demi-degrés et circuits dans un graphe orienté :</i>	
1. Introduction.....	317
2. Demi-degrés et circuits hamiltoniens.....	318
3. Demi-degrés et chemins hamiltoniens.....	323
4. Circuits de longueur supérieure à un nombre donné.....	326
CHAPITRE VI. — <i>Deux théorèmes combinatoires :</i>	
1. Graphes de comparabilité.....	327
2. A propos d'un lemme combinatoire.....	330
BIBLIOGRAPHIE.....	337

DEUXIÈME THÈSE



PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

**Homologie des ensembles ordonnés
et des espaces topologiques**



Vu et approuvé :

Paris, le 2 décembre 1963

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

MARC ZAMANSKY.

Vue et Permis d'imprimer :

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

JEAN ROCHE.



PARIS — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS & C^e
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55

167639-64

Dépôt légal, Imprimeur, 1965, n° 1693

Imprimé en France

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS & C^{ie}

Quai des Grands-Augustins, 55.

165325-65

Dépôt légal, Imprimeur, 1965, n° 1093.

Imprimé en France.